سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

مساواتوں کا نظریہ

جلد اوّل

تصنیف

ڈبلیو۔ ایس۔ برنسائڈ ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

اے۔ ڈبلیو۔ پیانٹن ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۵۳ھ م ۱۳۴۳ف م ۱۹۳۴ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

تمہید

پہلا باب

کثیر الارقام کے عام خواص

دوسرا باب

مساواتوں کے عام خواص

تیسرا باب

مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے درمیان روابط اور اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کا استعمال

چوتھا باب

مساواتوں کا استحالہ

پانچواں باب

تکافی اور ثنائی مساواتوں کا حل

چھٹا باب

کعبی اور چار درجی کا جبری حل

دفعہ صفحہ

ساتواں باب

مشتق تفاعلوں کے خواص

آٹھواں باب

اصلیوں کے تشاکلی تفاعل

نواں باب

مساواتوں کی اصلوں کی انتہائیں

دسواں باب

مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنا

گیارہواں باب

عددی مساواتوں کا حل

دفعہ　　صفحہ

بارھواں باب

ملتف اعداد اور ملتف متغیر

صفحہ

۴۸۶

(1)

مساواتوں کا نظریہ

تمہید

۱۔ **تعریفات**:۔ کسی ریاضی جملہ کو جس میں ایک مقدار شامل ہو اس مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔
ہمیں خاصکر ایسے جبری جملوں سے سابقہ پڑے گا جو منطق اور مکملہ ہونگے۔
کسی مقدار کے منطق تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف منطق شکل میں موجود ہو یعنی ایسی شکل میں جو کسری قوت نما اور علامت جذر سے آزاد ہو۔ کسی مقدار کے مکملہ تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف مکملہ شکل میں موجود ہو یعنی کسر کے نسب نما میں ہرگز نہ آئے۔ مثلاً جملہ ذیل جس میں ن مثبت صحیح عدد ہے لا کا ایک منطق اور مکملہ جبری تفاعل ہے:۔

$$ا\,لا^{ن} + ب\,لا^{ن-۱} + ج\,لا^{ن-۲} + \dots\dots + ک\,لا + ل$$

یہ یاد رہے کہ یہ تعریف صرف مقدار لا کے لحاظ سے ہے جس کا جملہ بالا تفاعل قرار دیا گیا ہے۔ مختلف سر ا، ب، ج وغیرہ غیر منطق یا کسری ہو سکتے ہیں اور پھر بھی لا کا یہ تفاعل منطق اور مکملہ ہوگا۔
اختصار کی خاطر لا کا تفاعل فا (لا)، ف (لا)، فہ (لا) یا ایسی ہی

کسی علامت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

ایسے جبری تفاعل کو **کثیر الارقام** اس وجہ سے کہا جاتا ہے کہ وہ لا کی مختلف قوتوں والی رقموں سے جو مثبت یا منفی علامتوں سے ملا دی گئی ہوں بنتا ہے۔ (2)

اگر لا کو متغیر قرار دیا جائے تو اس کی بعض قیمتوں کے لئے ایک کثیر الارقام دوسرے کثیر الارقام کے مساوی ہوسکتا ہے جو بالکل جداگانہ طور پر بنا ہو۔ اس قسم کے ربط کو اگر جبری طور پر ظاہر کیا جائے تو اس کو **مساوات** کہتے ہیں اور لا کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرے اس مساوات کی اصل کہلاتی ہے۔ تمام ممکن اصلوں کو معلوم کرنے کا نام مساوات کا مکمل حل ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ تمام رقموں کو ایک طرف لانے سے ہم کسی مساوات کو لا کی نزولی قوتوں میں حسب ذیل طریقہ پر ترتیب دے سکتے ہیں:-

$$\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}} = ۰$$

اس مساوات میں چونکہ بڑی سے بڑی قوت ن ہے اس لئے اس کو لا میں **ن ویں درجہ** کی مساوات کہتے ہیں۔ ایسی مساوات کے لئے ہم عام طور پر شکل مندرجہ بالا استعمال کریں گے۔ ا کے لاحقہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کونسا عددی سر لا کی کس قوت کے ساتھ ہے کیونکہ ہر رقم میں لا کی قوت اور ا کے لاحقہ کا مجموعہ ن رہتا ہے۔ کوئی مساوات نہیں بدلتی اگر ہم اس کی سب رقموں کو کسی مقدار سے تقسیم کریں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو $\text{ا}_{۰}$ سے تقسیم کرکے مساوات بالا میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر ایک بنا سکتے ہیں۔ اس قسم کا عمل اکثر سہولت بخش ہوگا اور ایسی صورتوں میں مساوات بالا شکل

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

میں لکھی جائے گی۔

مساوات کو **مکمل** ہم اس وقت کہیں گے جب اس میں ن سے صفر تک

قوت رکھنے والی لا کی سب رقمیں موجود ہوں اور غیر مکمل اس وقت جب بعض رقمیں موجود نہ ہوں یعنی جب ب۱، ب۲، ب۳ ...... وغیرہ سروں میں سے بعض صفر کے مساوی ہوں۔ رقم ب ن کو جس میں لا شامل نہیں ہے مطلق رقم کہتے ہیں۔ مساوات کو عددی یا جبری کہا جائے گا بموجب اس کے کہ اس کے سر اعداد یا جبری حروف ہوں۔

۲۔ عددی اور جبری مساواتیں۔ ریاضیات و طبیعیات کی اکثر تحقیقوں میں بالآخر ہم ایک ایسے ریاضی مسئلہ پر پہنچتے ہیں جو ایک مساوات کی شکل میں رونما ہوتا ہے اور اس مساوات کے حل پر اس مسئلہ کا حل منحصر ہوتا ہے۔ اس لئے یہ فطری بات ہے کہ تاریخ سائنس کی ابتدائی منزل میں ہی علمائے ریاضی کی توجہ اس نوعیت کے سوالات کی طرف منعطف ہوئی چنانچہ نظریہ معادلات کا علم جو اس وقت موجود ہے علمائے ریاضی کی مسلسل کوششوں کا نتیجہ ہے جو انہوں نے کسی درجہ کی مساواتوں کے حل کرنے کے لئے عام طریقوں کے دریافت کرنے میں صرف کیں۔ جب کسی مساوات کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو ایسی عددی قیمت یا جہاں ممکن ہو ایسی مختلف عددی قیمتوں کے دریافت کرنیکا مسئلہ پیش ہوتا ہے جو اس مساوات کو پورا کریں۔ نظریہ معادلات کے اس شعبہ میں بہت بڑی ترقی ہو چکی ہے اور اصلوں کی عددی قیمتوں کو معلوم کرنے کے بہترین طریقے جواب تک معلوم ہوئے خواہ یہ قیمتیں تقریبی ہوں یا بالکل ٹھیک اس کتاب میں اپنے اپنے مناسب مقام پر درج کئے جائیں گے۔

(8)

اتنی ہی ترقی اُن مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں نہیں ہوئی جن کے سر جبری حروف ہوں طالب علم یہ جانتا ہوگا کہ مساوات درجہ دوم کی اصل کو ایک عام ضابطہ کی شکل میں سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے جبکہ مساوات کے سر حروف سے تعبیر ہوں اور یہ کہ کسی خاص عددی مساوات کی عددی اصلیں اس ضابطہ میں حروف کی بجائے متناظر اعداد مندرج کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ اس لئے فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسی قسم کا ضابطہ اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے

حل کے لئے دریافت کرنا ممکن ہے چنانچہ اس قسم کے ضابطے تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساواتوں کے لئے حاصل کر لئے گئے ہیں لیکن اس کے ساتھ یہ بات بتا دینا ضروری ہے کہ بعض صورتوں میں ان ضابطوں میں حروف کی بجائے عددوں کے اندراج سے صحیح حل نہیں ملتا اور اس لئے اس لحاظ سے یہ ضابطے مساوات درجہ دوم کے جبری حل سے کمتر درجہ رکھتے ہیں۔

پانچویں اور اس سے اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے حل کے لئے اس قسم کے عام ضابطوں کو دریافت کرنے میں انتھک کوششیں کی گئیں لیکن تحقیقات جدید سے یہ بات پایۂ ثبوت کو پہنچ چکی ہے کہ پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی مساوات کی اصل کو جذری علامتوں اور جبر و مقابلہ کے دوسرے عام اعمال کی مدد سے سروں کی رقوم میں بیان کرنا ناممکن ہے۔

(4) ۴۔ کثیر الارقام۔ مشاہدات ماسبق سے ظاہر ہے کہ نظریہ معادلات کے علم کا ایک اہم مقصد متغیر مقدار لا کی وہ قیمتیں معلوم کرنا ہے جن کے اندراج سے کثیر الارقام ف (لا) کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ لا کی ایسی قیمتوں کو معلوم کرنے کی کوشش میں متعدد سوالات پیش ہوسکتے جو لا کی دوسری قیمتوں کے لئے کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں سے متعلق ہوسکتے۔ چنانچہ آئندہ باب میں فی الواقعی ہم دیکھیں گے کہ لا انتہا بڑی منفی مقدار ($-\infty$) سے لا انتہا بڑی مثبت مقدار ($+\infty$) تک متغیر ہونے والی لا کی قیمتوں کے مسلسل سلسلہ کے جواب میں ف (لا) بھی ایسی قیمتیں اختیار کرتا ہے جو مسلسل بدلتی ہیں۔ اس قسم کے تغیرات کا علم کثیر الارقام کے نظریہ کا ایک بہت ہی اہم حصہ ہے۔ عددی مساواتوں کا عام حل فی الحقیقت تحت طلب حل ہے اور متغیر لا کی بعض اختیاری قیمتوں کے جواب میں کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں پر غور کرنے سے گو ہم خود اصل کو نہ معلوم کرسکیں کم از کم یہ معلوم کرسکتے ہیں کہ مساوات کی اصل ان حدود کے اندر واقع ہے اور پھر اپنے عمل کو وسیع تر کرکے زیادہ قریب تر حدود دریافت کرسکتے ہیں۔

کثیر الارقام کو بعض اوقات کثیر درجی (Quantic) کہا جاتا ہے۔ مختلف درجوں کے کثیر درجی جملوں کو مختلف نام دینا سہولت بخش ہے چنانچہ دو درجی سہ درجی (کعبی) چہار درجی، پنج درجی، شش درجی وغیرہ اُن کثیر درجی جملوں کو تعبیر کرنے میں استعمال ہونگے جو علی الترتیب دوسرے تیسرے چوتھے، پانچویں، چھٹے وغیرہ درجوں کے ہوں۔ ان کثیر درجی جملوں کو صفر کے مساوی رکھنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو علی الترتیب مساوات درجہ دوم، مساوات درجہ سوم یا کعبی مساوات، مساوات درجہ چہارم وغیرہ کہتے ہیں۔

---

(5)

پہلا باب

کثیر الارقام کے عام خواص

۴ ـ متغیر (لا) کی مختلف قیمتوں کے متناظر کثیر الارقام کی قیمت میں تبدیلیوں کا مشاہدہ کرتے وقت ہمیں پہلے یہ دریافت کرنا ہوگا کہ جب متغیر لا کو بہت بڑی یا بہت چھوٹی قیمت دیجائے تو کثیر الارقام میں اہم ترین حصہ لینے والی ارقام کونسی ہونگی ۔ اس باب کے مختلف دفعات میں اسی پر روشنی ڈالی جائیگی ۔

کثیر الارقام $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$ کو شکل

$$\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}}\left[1 + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}\cdot\frac{1}{\text{لا}} + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_0}\cdot\frac{1}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ا}_3}{\text{ا}_0}\cdot\frac{1}{\text{لا}^3} + \dots + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-1}}{\text{ا}_0}\cdot\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}-1}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_0}\cdot\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right]$$

میں رکھنے سے ظاہر ہے کہ جب ' لا ' حد کی طرف مائل ہوتا ہے تو کثیر الارقام کی قیمت رقم $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}}$ کی طرف مائل ہوتی ہے ۔ یہ دوسرے لفظوں میں ایک ایسی مقدار معلوم ہو سکے گی کہ اوسکو یا اوس سے بڑی مقدار کو لا کی بجائے کثیر الارقام میں مندرج کریں تو رقم $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}}$ کی قیمت باقی تمام ارقام کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوگی ۔ آئندہ ہم ا_0 کو مثبت فرض کرینگے اور بالعموم مساواتوں اور کثیر الارقام کی اعلیٰ ترین قوت والی رقم مثبت علامت کی فرض کی جائیگی ۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

میں لا کی بجائے $\frac{\text{ک}}{\text{ا}_0} + 1$ یا اس سے بڑا عدد مندرج کیا جائے جہاں ک ' سروں ا_1، ا_2، ا_3 ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ میں سے بلالحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے تو رقم $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}}$ باقی

سب رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

نامساوات

$$\text{و}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} > \text{و}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{و}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{و}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{و}_{\text{ن}}$$

پوری ہوگی لا کی کسی ایسی قیمت کے لئے جو نامساوات (۵)

$$\text{و}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} > \text{ک}\,(\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{لا} + 1)$$

کو پورا کرے جہاں ک سروں و۱، و۲ ...... ان میں سے بلالحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے۔ خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

$$\text{و}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} > \text{ک}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - 1}{\text{لا} - 1}$$

$$\text{یا} \quad \text{لا}^{\text{ن}} > \frac{\text{ک}}{\text{و}_0(\text{لا}-1)}\,(\text{لا}^{\text{ن}} - 1)$$

یہ نامساوات پوری ہوگی اگر

$$\text{و}_0\,(\text{لا} - 1) \geq \text{ک}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{لا} \geq \frac{\text{ک}}{\text{و}_0} + 1$$

یہاں جو کچھ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے اس صورت میں جبکہ کثیر الارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں ہم ایک ایسا عدد معلوم کر سکتے ہیں کہ جب لا کو $+\infty$ سے قریب تر قیمتیں دی جائیں تو کثیر الارقام کی علامت ہمیشہ مثبت رہے گی۔ اگر ہم لا کی علامت بدل دیں تو کثیر الارقام کی پہلی رقم کی علامت باقی رہے گی یا منفی ہو جائے گی بموجب اس کے کہ ن جفت عدد ہو یا طاق۔ اس سے ظاہر ہے کہ مثلاً بلالحاظ عدد سے ہم لا کی ایک ایسی منفی قیمت بھی دریافت کر سکتے ہیں کہ $-\infty$ سے قریب تر قیمتوں کے لئے کثیر الارقام کی علامت ہمیشہ مثبت ہوگی یا منفی بموجب اس کے کہ ن جفت ہو یا طاق۔ عام طور پر کثیر الارقام کی ترکیب ایسی ہوتی ہے کہ ہم یہاں معلوم کی ہوئی حدود سے زیادہ صحیح حدود جو صفر سے قریب ہوں دریافت کر سکتے ہیں جن کے باہر تفاعل

کی علامت ہمیشہ وہی رہیگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مندرجہ بالا ثبوت میں ہم نے ناموافق ترین صورت لی ہے جسمیں پہلے سر کے سوائے باقی تمام سر منفی اور $ا_ک$ کے مساوی ہیں حالانکہ عام طور پر سر مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔ کسی آیندہ باب میں ہم وہ مسئلے کو بیان کریں گے جن کی مدد سے یہ زیادہ صحیح حدود دریافت کی جا سکتی ہیں۔

۵ــــ اب ہم یہہ دریافت کریں گے کہ اگر لا کی قیمت غیر محدود طور پر گھٹائی جائے تو کثیر الارقام کی کونسی رقم سب سے زیادہ اہمیت رکھتی ہے۔ نیز ہم ایک ایسی مقدار دریافت کرینگے کہ لا کی بجائے اسکو یا اس سے چھوٹی کسی قیمت کو درج کرنے سے مذکورۂ بالا رقم باقی سب رقموں پر غالب ہو جائے۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$ا_٠ لا^{ن} + ا_١ لا^{ن-١} + ا_٢ لا^{ن-٢} + \cdots\cdots + ا_{ن-١} لا + ا_ن \qquad (7)$$

میں لا کی بجائے $\frac{ا_ن}{ا_ن + ا_ک}$ یا اس سے چھوٹی قیمت مندرج کی جائے جہاں $ا_ن$ کو چھوڑ کر سب سے بڑا سر $ا_ک$ ہے تو رقم $ا_ن$ بلحاظ قیمتِ مطلق باقی تمام رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوں۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $لا = \frac{١}{ما}$ تو دفعہ ۴ کے مسئلہ سے

چونکہ سروں $ا_٠، ا_١، ا_٢ \ldots ا_{ن-١}$ میں سے بلا لحاظ علامت سب سے بڑا سر $ا_ک$ ہے ما کی قیمت $\frac{ا_ک}{ا_ن} + ١$ یا اس سے بڑی قیمت کے لئے

$$ا_ن ما^{ن} > ا_{ن-١} ما^{ن-١} + ا_{ن-٢} ما^{ن-٢} + \ldots\ldots + ا_١ ما + ا_٠$$

یعنی

$$ا_ن > ا_{ن-١} \frac{١}{ما} + ا_{ن-٢} \frac{١}{ما^٢} + ا_{ن-٣} \frac{١}{ما^٣} + \ldots\ldots + ا_٠ \frac{١}{ما^ن}$$

پس $\frac{ا_ن}{ا_ن + ا_ک}$ یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے

$$\text{ا}_{\text{ن}} > \text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

یہ مسئلہ دوسرے الفاظ میں اکثر اس طرح بیان کیا جاتا ہے :-
لا کو اتنی چھوٹی قیمتیں مقرر کی جا سکتی ہیں کہ انکے اندراج سے کثیر الارقام

$$\text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔
اس بیان کی تصدیق ثبوت بالا سے ظاہر ہے کیونکہ $\text{ا}_{\text{ن}}$ کو مقررہ مقدار خیال کیا جا سکتا ہے ۔ ایک اور مفید شکل میں مسئلہ بالا اس طرح پیش کیا جا سکتا ہے :-
جب متغیر لا کو بہت چھوٹی قیمت دی جائے تو کثیر الارقام

$$\text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{لا}^{۳} + \ldots\ldots + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

کی علامت وہی ہوگی جو رقم اول $\text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا}$ کی ہے۔
یہ بات کثیر الارقام کو شکل

$$\text{لا}\left[\text{ا}_{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\right]$$

میں رکھنے سے بخوبی واضح ہے کیونکہ جب لا کو کافی چھوٹی قیمت دیجاتی ہے تو رقم $\text{ا}_{\text{ن}-۱}$ کی قیمت خطوط وحدانی کے اندر کی تمام دوسری رقموں کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوتی ہے اور اس لئے جملہ کی علامت $\text{ا}_{\text{ن}-۱}$ کی علامت پر منحصر ہوگی۔

۶ — متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی۔ مشتق تفاعل — (8)

اب ہم اس شکل کا امتحان کرینگے جو کثیر الارقام اختیار کرتا ہے جبکہ لا کی بجائے لا + ہ درج کیا جائے ۔ اگر ہم کو لازماً مثبت فرض کریں تو کثیر الارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کے اضافہ کے جواب میں ہوگی ، اور اس میں اگر ہ کی علامت بدل دی جائے

تو کثیر الارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کو گھٹانے کے جواب میں ہوگی۔
جب لا بدل کر لا + ھ ہو جائے تو ف (لا) بدلکر ف (لا + ھ) یعنی

$$\text{ا}_{\text{۰}}(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{۱}}(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}-\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲}}(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}-\text{۲}} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}-\text{۱}}(\text{لا}+\text{ھ}) + \text{ا}_{\text{ن}}$$

ہو جائے گا۔

فرض کرو کہ اس جملہ کی ہر رقم کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا گیا ہے اور پھر جملہ کو ھ کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$+\,\text{ھ}\left[\text{ن}\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}} + (\text{ن}-\text{۱})\,\text{ا}_{\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}} + (\text{ن}-\text{۲})\,\text{ا}_{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۳}} + \ldots + \text{۲}\,\text{ا}_{\text{ن}-\text{۲}}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-\text{۱}}\right]$$

$$+\,\frac{\text{ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱}\times\text{۲}}\left[\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}} + (\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})\,\text{ا}_{\text{۱}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۳}} + \ldots + \text{۲}\,\text{ا}_{\text{ن}-\text{۲}}\right] + \ldots\ldots$$

$$+\,\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}\times\ldots\times\text{ن}}\left[\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})\ldots\ldots\text{۲}\times\text{۱}\right]\text{ا}_{\text{۰}}$$

یہ ظاہر ہے کہ جملہ بالا کا وہ حصہ جس میں ھ شامل نہیں ہے ف (لا) ہے اور یہ کہ ھ کی مختلف قوتوں کے متواتر سر لا کے ایسے جملے ہیں جن کے درجے بقدر ایک کے گھٹتے جاتے ہیں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ھ کا سر جملہ ف (لا) سے حاصل ہو سکتا ہے اس طور پر کہ ف (لا) کی ہر رقم کو اس کی قوت سے ضرب دیا جائے اور اس رقم کی قوت کو بقدر ایک کے گھٹایا جائے اور رقم کی علامت برقرار رکھی جائے۔ ف (لا) کی تمام رقموں کے ساتھ یہی عمل کیا جائے تو ان کا مجموعہ ایسا کثیر الارقام ہوگا جس کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹا ہوا ہوگا۔

اس کثیر الارقام کو ف (لا) کا پہلا مشتق کہتے ہیں۔ عام طور پر اسکو فَ (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔

(9) اب فَ (لا) پر بالکل اسی طرح کا عمل کرنے سے $\frac{\text{ھ}^{\text{۲}}}{\text{۱}\times\text{۲}}$ کا سر حاصل ہو سکتا ہے جسطرح کہ فَ (لا)، ف (لا) سے حاصل کیا گیا یا اسطرح کہ ف (لا) پر دو بار

یہ عمل کیا جائے۔ اس سر کو فً (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اور اسکو ف (لا) کا دوسرا مشتق کہتے ہیں۔ بالکل اسی طرح کے طریق عمل سے یکے بعد دیگرے ھ کے دوسرے سروں کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اور اس لئے ترقیم متذکرہ بالا کو استعمال کرنے سے ہم نتیجہ بالا کو شکل ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں:۔

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{لا}) + \text{ھ}\,\text{ف}'(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^2}{1\times 2}\text{ف}''(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^3}{1\times 2\times 3}\text{ف}'''(\text{لا}) + \ldots\ldots + \text{ھ}^{\text{ن}}\,!$$

یہ یاد رہے کہ چونکہ لا اور ھ کو آپس میں بدل دینے سے ف (لا + ھ) بدل نہیں جاتا اس لئے اس کے پھیلاؤ کو شکل ذیل میں بھی رکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{ھ}) + \text{لا}\,\text{ف}'(\text{ھ}) + \frac{\text{لا}^2}{1\times 2}\text{ف}''(\text{ھ}) + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}}\,!$$

ہم بالعموم وہ ترقیم استعمال کرینگے جو یہاں سمجھائی گئی ہے۔ بعض اوقات مشتق تفاعیل فَ (لا)، فً (لا)، فٌ (لا)، ...... کو بنظر سہولت $\text{ف}_1(\text{لا})$، $\text{ف}_2(\text{لا})$، $\text{ف}_3(\text{لا})$، ..... سے بھی تعبیر کیا جائیگا۔ مثلاً ایسی صورت میں ف(لا + ھ) کے پھیلاؤ کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جائیگا۔

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{ھ}) + \text{ھ}\,\text{ف}_1(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^2}{1\times 2}\text{ف}_2(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^3}{1\times 2\times 3}\text{ف}_3(\text{لا}) + \ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{\text{ھ}^{\text{ر}}}{1\times 2\times 3\times\ldots\times\text{ر}}\text{ف}_{\text{ر}}(\text{لا}) + \ldots$$

مثال

کثیر الارقام ۴ لا³ + ۶ لا² − ۷ لا + ۴ میں لا کی بجائے لا + ھ مندرج کریں تو نتیجہ معلوم کرو۔

یہاں

$$\text{ف}(\text{لا}) = 4\,\text{لا}^3 + 6\,\text{لا}^2 - 7\,\text{لا} + 4$$

$$\text{ف}'(\text{لا}) = 12\,\text{لا}^2 + 12\,\text{لا} - 7$$

$$\text{ف}''(\text{لا}) = 24\,\text{لا} + 12$$

$$\text{ف}'''(\text{لا}) = 24$$

اوراس لئے نتیجہ ہوگا ۴ لا³ + ۶ لا² - ۷ لا + ۴ + ھ (۱۲ لا² + ۱۲ لا - ۷) + ھ²/۲ (۲۴ لا + ۱۲)

+ ۲۴ ھ³/(۱×۲×۳) - اندراج کے عمل سے اس کی تصدیق طالب علم خود کرلے۔

۷ ۔ لا کے ایک منطق کملہ تفاعل کا تسلسل :- اگر ایک منطق اور کملہ تفاعل

ف (لا) میں لا کی قیمت لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ ایک مقدار ا سے ایک دوسری بڑی مقدار ب تک بدلی جائے تو ہم ثابت کرینگے کہ ف (لا) کی قیمت بھی اس اثناء میں لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ بدلتی جائے گی۔ بہ الفاظ دیگر ہم ثابت کریں گے کہ ف (لا) لا کے ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔ (10)

فرض کرو کہ لا ، ا سے ا + ھ ہوجاتا ہے تو اس کے جواب میں ف (لا) کا اضافہ ہوگا

ف (ا + ھ) - ف (ا)

اور یہ دفعہ ۶ کی رو سے

ھ فَ (ا) + ھ²/(۱×۲) فً (ا) + ... + ا. ھ^ن

کے مساوی ہے جس میں فَ (ا)، فً (ا)، ...... محدود مقداریں ہیں۔ اب دفعہ ۵ کے مسئلے سے اس آخری جملہ کی قیمت کو ، ھ کو کافی چھوٹا لینے سے ، کسی مقررہ مقدار سے کم بنایا جاسکتا ہے۔ پس ف (ا + ھ) اور ف (ا) کا فرق اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اور یہ فرق بالآخر ھ کے ساتھ صفر ہو جائیگا۔ ا سے ب تک لا کے تغیر کی تمام منزلوں میں یہ بات درست رہتی ہے اور اس لئے ف (لا) کا تسلسل ثابت ہو جاتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ہم نے یہاں یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ ف (ا) سے ف (ب) تک ف (لا) مسلسل بڑھتا ہے۔ ف (لا) مسلسل بڑھ سکتا ہے یا مسلسل گھٹ سکتا ہے یا چند مقامات پر بڑھتا اور باقی مقامات پر گھٹ سکتا ہے لیکن ثبوت بالا سے ظاہر ہے کہ وہ ایک قیمت سے دوسری قیمت دفعتاً یا وقت واحد میں اختیار نہیں کرسکتا اور اس لئے جب ، لا ، ا سے ب تک

مسلسل بڑھتا ہے تو ف (لا) کی تمام متناظر قیمتیں ف (ا) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ فَ (لا) کی علامت سے یہ معلوم ہوسکیگا کہ ف (لا) آیا بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ کیونکہ دفعہ ۵ سے یہ بات واضح ہے کہ ھ کافی چھوٹا ہو تو پورے اضافہ کی علامت رقم ھ فَ (ا) کی علامت پر منحصر ہوتی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ جب فَ (ا) مثبت ہو تو ف (لا)، لا کے ساتھ بڑھتا ہے اور فَ (ا) منفی ہو تو ف (لا)، لا کے بڑھنے سے گھٹتا ہے۔

۸۔ خارج قسمت اور باقی کی شکل جبکہ کسی کثیر الارقام کو ایک ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے:۔

فرض کرو کہ کثیر الارقام

$$\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}} \qquad (11)$$

کو لا-ھ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}-۲}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}-۱}$$

اس کو ق سے اور باقی کو ر سے تعبیر کرو تو مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا}-\text{ھ})\,\text{ق} + \text{ر}$$

اس مساوات کے یہ معنی ہیں کہ اگر ق کو لا-ھ سے ضرب دیکر اس میں ر جمع کیا جائے تو نتیجہ ف (لا) کے مماثل ہونا چاہئے اور اس کی ہر رقم ف (لا) کی متناظر رقم کے مماثل ہونی چاہئے اس قسم کی مساواتوں کو دوسری مساواتوں سے جو مماثلات نہیں ہوتیں ممتاز کرنے کے لئے مساوات کی معمولی علامت استعمال کرنے کی بجائے علامت بالا اختیار کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مماثلہ کی بائیں جانب کا جملہ ہے

$$\text{ب}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \left.\begin{matrix}\text{ب}_{۱}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{۰}\end{matrix}\right\}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \left.\begin{matrix}\text{ب}_{۲}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{۱}\end{matrix}\right\}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \left.\begin{matrix}\text{ب}_{۳}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{۲}\end{matrix}\right\}\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \dots + \left.\begin{matrix}\text{ب}_{\text{ن}-۱}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-۲}\end{matrix}\right\}\text{لا} + \left.\begin{matrix}\text{ر}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-۱}\end{matrix}\right.$$

دونوں جانبوں کے لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل

ہوتی ہیں جن سے $ب_0$، $ب_1$، $ب_2$،..... $ب_{ن-1}$ کا تعین ہو جاتا ہے۔

$$ب_0 = ا_0$$

$$ب_1 = ب_0 ھ + ا_1$$

$$ب_2 = ب_1 ھ + ا_2$$

$$ب_3 = ب_2 ھ + ا_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$ب_{ن-1} = ب_{ن-2} ھ + ا_{ن-1}$$

$$ک = ب_{ن-1} ھ + ا_ن$$

ان مساواتوں سے خارج قسمت کے سروں $ب_0$، $ب_1$، $ب_2$،... کو اور باقی ک کو یکے بعد دیگرے آسانی کے ساتھ حاصل کرنیکا طریقہ ملتا ہے۔ اس غرض کے لئے ہم سلسلۂ اعمال کو حسب ذیل طریقہ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$ا_0 \quad ا_1 \quad ا_2 \quad ا_3 \quad \dots\dots \quad ا_{ن-1} \quad ا_ن$$

$$ب_0 ھ \quad ب_1 ھ \quad ب_2 ھ \quad \dots\dots \quad ب_{ن-2} ھ \quad ب_{ن-1} ھ$$

$$ب_0 \quad ب_1 \quad ب_2 \quad ب_3 \quad \dots\dots \quad ب_{ن-1} \quad ک \qquad (12)$$

پہلی سطر میں ف (لا) کے سر علی الترتیب لکھے گئے ہیں۔ دوسری سطر کی پہلی رقم $ا_0$ کو (یا $ب_0$ کو جو اس کے مساوی ہے) ھ سے ضرب دیکر حاصل کی گئی ہے اور حاصل ضرب $ب_0 ھ$ کو $ا_1$ کے نیچے رکھ کر اسے $ا_1$ میں جمع کرنے سے تیسری سطر کی پہلی رقم $ب_1$ حاصل کی گئی ہے۔ اس حاصل شدہ رقم کو ھ سے ضرب دیکر $ا_2$ کے نیچے رکھا گیا ہے اور حاصل ضرب کو $ا_2$ میں جمع کرکے تیسری سطر کی دوسری رقم حاصل کی گئی ہے۔ اس عمل کی تکرار سے خارج قسمت کے تمام سر یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے اور اس طور پر حاصل شدہ آخری مقدار باقی کو تعبیر کرے گی۔ چند مثالوں سے اس طریقہ کی

وضاحت ہو جائے گی۔

امثلہ

۱۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ ۳لا^{۴} - ۵لا^{۳} + ۱۰لا^{۲} + ۱۱لا - ۶۱ کو لا - ۳ سے تقسیم کیا جائے۔ محسوب کرنے کا طریقہ حسب ترتیب ذیل ہوگا۔

۶۱ -	۱۱	۱۰	۵ -	۳
۲۳۱	۶۶	۱۲	۹	
۱۷۰	۷۷	۲۲	۴	

اس لئے خارج قسمت ۳لا^{۳} + ۴لا^{۲} + ۲۲لا + ۷۷ اور باقی ۱۷۰ ہے۔

۲۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ لا^{۳} + ۵لا^{۲} + ۳لا + ۲ کو لا - ۱ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا^{۲} + ۶لا + ۹،

ر = ۱۱

۳۔ ق اور ر معلوم کرو جبکہ لا^{۵} - ۴لا^{۴} + ۷لا^{۳} - ۱۱لا - ۱۳ کو لا - ۵ سے تقسیم کیا جائے۔

نوٹ۔ اگر کسی کثیر الارقام میں کوئی رقم غائب ہو تو ف (لا) کے سر لکھتے وقت اس رقم کے سر کے بجائے صفر لکھنا ہوگا مثلاً اس مثال میں پہلی سطر اس طرح لکھی جائے گی۔

۱۳ - ۱۱ - ۰ ۷ ۴- ۱

جواب ق = لا^{۴} + لا^{۳} + ۱۲لا^{۲} + ۲۰لا + ۸۹، ر = ۱۴۳۲

۴۔ ق اور ر معلوم کرو جبکہ لا^{۹} + ۳لا^{۸} - ۱۵لا^{۲} + ۲ کو لا - ۲ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا^{۸} + ۲لا^{۷} + ۷لا^{۶} + ۱۴لا^{۵} + ۲۸لا^{۴} + ۵۶لا^{۳}

+ ۱۱۲لا^{۲} + ۲۰۹لا + ۴۱۸، ر = ۸۳۸

۵۔ ق اور ر معلوم کرو جبکہ لا^{۵} + لا^{۲} - ۱۰لا + ۱۱۳ کو لا + ۴ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا^{۴} - ۴لا^{۳} + ۱۶لا^{۲} - ۶۳لا + ۲۴۲، ر = - ۸۵۵

تفاعلوں کی جدول ۔ اگر کسی کثیر الارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو دفعہ گزشتہ کی مدد سے ہم بہ آسانی لا کی کسی قیمت کے جواب میں ف(لا) کی

قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔
کیونکہ مساوات

ف (لا) ≡ (لا − ھ) ق + سا

پوری ہونی چاہیئے خواہ لا کی بجائے کوئی مقدار درج کیجائے کیونکہ اس کے طرفین متماثلاً مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ھ تو ف (ھ) = سا، کیونکہ لا − ھ = ۰ اور ق محدود ہے۔
پس ف (لا) میں لا کی بجائے ھ درج کرنے سے ہم وہ باقی حاصل کرتے ہیں جو ف (لا) کو لا − ھ سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔ اس باقی کو گزشتہ دفعہ کی مدد سے بآسانی معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً دفعہ ۸ کی مثال (۱) کے کثیر الارقام

۳ لا^{۴} − ۵ لا^{۳} + ۱۰ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۶۱

میں لا کی بجائے ۳ درج کرنے سے ۱۷۰ حاصل ہوتا ہے جو کثیر الارقام کو لا − ۳ سے تقسیم کرنے کی صورت میں باقی ہے۔ طالب علم عملی طور پر ۳ درج کر کے اس کی تصدیق کر سکتا ہے۔

کثیر الارقام

لا^{۵} + لا^{۲} − ۱۰ لا + ۱۱۳

میں لا کی بجائے −۴ درج کرنے سے −۸۵۵ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ کی مثال ۵ سے ظاہر ہے۔ ہم نے دفعہ ۷ میں یہ دیکھا ہے کہ جب لا، −∞ سے +∞ تک بڑھنی والی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ اختیار کرتا ہے تو اس سلسلہ کے جواب میں ف (لا) بھی ایک مسلسل سلسلہ میں سے گزرتا ہے۔

اگر ہم کسی کثیر الارقام میں جس کے سر دیے ہوئے اعداد ہیں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے اعداد کا ایک سلسلہ درج کریں مثلاً سلسلہ

−۵، −۴، −۳، −۲، −۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ .....

کے اعداد اور ان کے جواب میں ف (لا) کی قیمتوں کو محسوب کریں تو اس عمل کو ہم تفاعل کی جدول بنانے کا عمل کہہ سکتے ہیں۔

امثلہ

۱۔۔۔ لا کی حسب ذیل قیمتوں

−۴، −۳، −۲، −۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴

کے متناظر جملہ ۲ لا^۲ + لا − ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

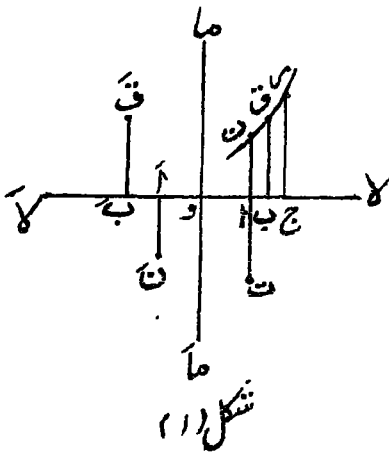
لا کی قیمتیں	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
ف (لا) "	۲۲	۹	۰	−۵	−۶	−۳	۴	۱۵	۳۰

۲۔۔۔ لا کی انہی قیمتوں کے لئے جملہ ۱۰ لا^۳ − ۱۷ لا^۲ + لا + ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی قیمتیں	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
ف (لا) "	−۹۱۰	−۴۲۰	−۱۴۴	−۲۱	۶	۰	۲۰	۱۲۶	۳۷۸

۱۰۔۔۔ کثیر الارقام کی ترسیمی تعبیر۔ متغیر کی تبدیلیوں کے جواب میں کثیر الارقام کی تبدیلیوں کی تحقیق کرنے کے لئے ظاہر ہے کہ ایک ایسا طریقہ جس سے کثیر الارقام کی مختلف قیمتوں کا مقابلہ ایک دوسرے سے بہ آسانی ہو سکے بہت مفید ہوگا ۔ اس کثیر الارقام کی صورت میں جس کے سر معلوم اعداد ہوں لا کی کسی مفروضہ قیمت کے جواب میں تفاعل کی ایک معین قیمت ہوگی ۔

ہم ترسیمی تعبیر کے ایک طریقہ کی توضیح کریں گے جس سے لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ف (لا) کی متناظر قیمتیں نظر کے سامنے آجاتی ہیں ۔

فرض کرو کہ دو خطوطِ مستقیم و لا اور وما (شکل (۱)) ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور دونوں سمتوں میں ان کو غیر محدود طور پر خارج کیا گیا ہے ان کو علی الترتیب محور لا اور محور ما کہتے ہیں۔ و کے سیدھے طرف محور لا پر و سے پیمایش شدہ فاصلے مثلاً وأ و ب وغیرہ مثبت سمجھے جاتے ہیں اور و کے بائیں جانب محور لا پر کے فاصلے مثلاً وأَ منفی ۔ لا لاَ کے اوپر وما کے متوازی خطوط مثلاً أ ن یا ب ق مثبت اور اس کے نیچے مثلاً أ ت یا أَ نَ منفی سمجھے جاتے ہیں ۔ طالب علم نے علم مثلث میں ان قراردادوں سے

اچھی واقفیت حاصل کی ہوگی۔
و لا پر کوئی اختیاری طول اکائی کا کام دے سکتا ہے اور کوئی مثبت یا منفی عدد اس اکائی کی رقوم میں لا لاَ پر تعبیر ہو سکتا ہے۔ خط و لا پر ۰ سے لے کر + ∞ تک بڑھنے والے اور خط و لاَ پر ۰ سے – ∞ تک گھٹنے والے اعداد تعبیر ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی عدد م، و ا سے تعبیر ہوتا ہے۔ ف (م) کی قیمت معلوم کرو۔ ا سے ا ن، و ما کے متوازی کھینچو ایسے کہ ا ن، ف (م) کی قیمت کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرے جس پر و ا، م کو تعبیر کرتا ہے۔ ف (م) کی قیمت کی علامت سے یہ معلوم ہوگا کہ اس کو تعبیر کرنے والا طول لا لاَ کے اوپر لیا جائے یا نیچے۔ م کی مختلف قیمتوں و ا، و ب، و ج، وغیرہ کے جواب میں نقطوں کا ایک سلسلہ ن، ق، سا وغیرہ ملیگا اور اس طرح اگر ہم م کی قیمتوں کے سلسلہ کو لا انتہا بڑھائیں تاکہ + ∞ اور – ∞ کے درمیان تمام اعداد اس میں شامل ہوں تو یہ نقطے ایک مسلسل منحنی مرتسم کریں گے۔

شکل (۱)

اس منحنی پر کوئی نقطے لیکر ان سے محور لا پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں سے ف (لا) کی مختلف قیمتیں نظر کے سامنے آجائیں گی۔

اس عمل کو تفاعل (ف (لا)) کی ترسیم معلوم کرنے کا عمل کہتے ہیں۔ علم ہندسہ تحلیلی سے واقف طالب علم فوراً پہچان لے گا کہ یہ دراصل منحنی یا = ف (لا) کی ترسیم معلوم کرنے کا عمل ہے۔

اس طریقہ کے عملی استعمال میں اس طرح شروع کرنا بہتر ہوگا کہ پہلے لا کو مثبت یا منفی چند صحیح عددوں کے مساوی لیا جائے اور ان کے جواب

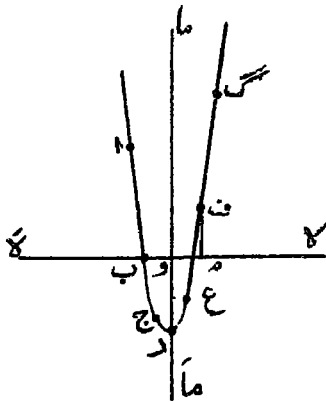
میں فت (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ لا کی قیمتوں کو فصلہ اور فت (لا) کی متناظر قیمتوں کو معین قرار دیکر نقطے مرتسم کئے جائیں تب بالعموم یہ ممکن ہوگا کہ ہم ان نقطوں میں سے ایک ایسا منحنی کھینچ سکیں جو تفاعل کی قیمتوں پر روشنی ڈالے اور جس سے تفاعل کی نوعیت کا اندازہ ہو سکے۔ اس رسمی تعبیر کی صحت بلاشبہ ان نقطوں کی تعداد کے ساتھ بڑھیگی جو متغیر کی کسی دو دی ہوئی قیمتوں کے درمیان معلوم کئے گئے ہوں۔

جب کسی دو مجوزہ حدود کے اندر منحنی کے کسی حصہ کا احتیاط سے امتحان کرنا ہو تو ان حدود کے درمیان متغیر کو ایسی قیمتیں دینا اکثر ضروری ہوگا جن میں سے کسی دو متصلہ قیمتوں کا فرق اکائی سے چھوٹا ہو۔ امثلہ ذیل سے ان اصولوں کی توضیح ہوگی۔

امثلہ

۱۔ ۲ لا۲ + لا − ۶ کی ترسیم معلوم کرو۔

طول کی اکائی و د کا ½ لی گئی ہے (شکل ۲)۔

دفعہ ۹ کی مثال (۱) میں −۴ سے +۴ تک بشمول ہر دو اعداد لا کی صحیح عددی قیمتوں کے جواب میں فت (لا) کی قیمتیں دی ہوئی ہیں۔

ان قیمتوں کی مدد سے منحنی پر کے نو نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔ جن میں سے سات ا، ب، ج، د، ع، ف، گ یہاں مرتسم کئے گئے ہیں باقی دو نقطے اس شکل کے حدود سے باہر واقع ہیں۔

ج اور ع کے درمیان منحنی کو زیادہ صحت کے ساتھ مرتسم کرنا طالب علم کے لئے ایک مفید مشق ہوگی۔ یہ اس طرح ہو سکتا ہے کہ

شکل (۲)

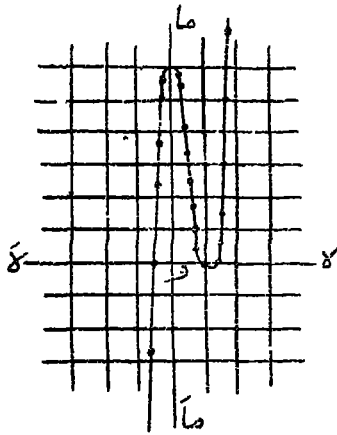
-١ اور +١ کے درمیان لا کی بہت سی قیمتوں مثلاً ان تمام قیمتوں کے جواب میں جن کا فرق $\frac{1}{10}$ ہے ف (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ ذیل کی مثال میں اس قسم کا عمل کیا گیا ہے۔

۲ ــــ کثیر الارقام

$$۱۰ \text{ لا}^{۳} - ۱۷ \text{ لا}^{۲} + \text{لا} + ۶$$

کو مرتسم کرو۔

-۴ اور ۴ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جدول دفعہ ۹ میں حاصل کر لی گئی ہے۔

دفعہ ۴ کی مشق کے طور پر یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ ۲٫۷ سے بڑی لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے یہ تفاعل ہمیشہ مثبت رہتا ہے اور -۲٫۷ سے چھوٹی۔ ∞ تک لا کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل منفی قیمت رکھتا ہے۔ پس اگر منحنی محور لا کو قطع کرے گا تو ایسے نقطہ (یا نقطوں) پر قطع کرے گا جو -۲٫۷ اور +۲٫۷ کے درمیان لا کی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں ہے۔ اس لئے اگر ہمارا مقصد صرف مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں کے مقامات کا تعین کرنا یا ان کو تقریبی طور پر معلوم کرنا ہو تو جدول کو صرف -۲٫۷ اور ۲٫۷ کے درمیانی وقفہ تک محدود رکھا جا سکتا ہے۔

شکل (۳)

یہ ایسی صورت ہے جس میں لا کی صرف صحیح عددی قیمتوں کے اندراج سے منحنی کو مرتسم کرنے میں بہت کم مدد ملتی ہے۔ اور اس لئے لا کو ایسی قیمتیں دینی ہونگی جن میں سے کسی دو متصل قیمتوں کا باہمی فرق بہت چھوٹا ہو۔ جدول ذیل میں ہم نے اعداد صحیح -۱، ۰ اور ۱ اور ۲ کے درمیان $\frac{1}{10}$ کے وقفوں سے کام لیا ہے۔ ان قیمتوں سے منحنی پر کے تناظر نقطے تقریبی طور پر حاصل کئے جا سکتے ہیں اور منحنی کو مرتسم کیا جا سکتا ہے۔ دیکھو شکل (۳)

لا کی قیمتیں	-۱	-۰٫۹	-۰٫۸	-۰٫۷	-۰٫۶	-۰٫۵	-۰٫۴	-۰٫۳	-۰٫۲	-۰٫۱
ف(لا) "	-۲۲	-۱۵٫۹۶	-۱۰٫۸	-۶٫۷۶	-۲٫۸۸	۰	۲٫۲۴	۳٫۹	۵٫۰۴	۵٫۷۲

لا کی قیمتیں	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹
ف(لا) "	۶	۵٫۹۴	۵٫۶	۵٫۰۴	۴٫۳۲	۳٫۵	۲٫۶۴	۱٫۸	۱٫۰۴	۰٫۴۲

لا کی قیمتیں	۱	۱٫۱	۱٫۲	۱٫۳	۱٫۴	۱٫۵	۱٫۶	۱٫۷	۱٫۸	۱٫۹	۲
ف(لا) "	۰	-۰٫۱۶	۰	۰٫۵۴	۱٫۵۲	۳	۵٫۰۴	۷٫۷	۱۱٫۰۴	۱۵٫۱۲	۲۰

مثال (۱) میں مرتسم شدہ منحنی محور لا کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے (یعنی جن کی تعداد کثیر الارقام کے درجے کے مساوی ہے) دوسرے الفاظ میں لا کی دو قیمتیں ایسی ہیں جن کے لئے دئے ہوئے کثیر الارقام کی قیمت صفر ہوتی ہے مساوات ۲ لا^۲ + لا − ۶ = ۰ کی اصلیں یہ قیمتیں ہونگی یعنی −۲ اور ۱٫۵ ۔ اسی طرح مثال (۳) میں مرتسم شدہ منحنی محور لا کو تین نقطوں پر قطع کرتا ہے یعنی اُن نقطوں پر جو کہ مساوات ۱۰ لا^۳ − ۱۷ لا^۲ + لا + ۶ = ۰ کی اصلوں کے جواب میں ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ دئے ہوئے کثیر الارقام کو تعبیر کرنیوالا منحنی محور لا کو قطع نہ کرے یا اتنے نقطوں پر قطع کرے جن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ سے کم ہو۔ ایسی صورتیں مساواتوں کی خیالی اصلوں سے متعلق ہوتی ہیں جن پر باب آیندہ میں تفصیلی بحث کیجائیگی مثلاً کثیر الارقام ۲ لا^۲ + لا + ۲ کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ اس تفاعل اور مثال (۱) کے تفاعل میں صرف مستقل ۸ کا فرق ہے اس لئے اس کی ہر قیمت مثال (۱) کے تفاعل کی حاصل شدہ ہر قیمت میں صرف ۸ جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور پورا منحنی مرتسم شدہ منحنی کو محور ما ... (۸) اکائیوں کے فاصلہ تک اوپر وار حرکت دینے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مساوات ۲ لا^۲ + لا + ۲ = ۰ کو حل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ متغیر لا کی وہ دو قیمتیں جو کثیر الارقام کو صفر بناتی ہیں اس صورت میں خیالی ہیں۔ منحنی محور لا کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے اُن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ سے کم ہو تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی محور لا کو

خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۱۱۔ کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ دفعات ماسبق سے یہ بات ظاہر ہے کہ جب متغیر لا، $-\infty$ سے $+\infty$ تک بدلتا ہے تو تفاعل ف (لا) میں بہت سے تغیرات واقع ہو سکتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ وہ کسی وقفہ میں بڑھتا جائے اور پھر بڑھنا چھوڑ دے اور گھٹنا شروع کرے۔ پھر گھٹنا چھوڑ دے اور مکرر بڑھنا شروع کرے جسکے بعد ممکن ہے کہ تفاعل کچھ وقفہ تک پھر گھٹنے لگے یا مسلسل بڑھتا جائے (جیسا کہ دفعہ ماسبق کی آخری مثال سے ظاہر ہے) اس نقطہ پر جہاں تفاعل بڑھنا چھوڑتا ہے اور گھٹنا شروع کرتا ہے ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اعظم قیمت اختیار کی ہے اور جب تفاعل گھٹنا چھوڑتا ہے اور بڑھنا شروع کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اقل قیمت اختیار کی ہے تفاعل کی ایسی قیمتیں متعدد ہو سکتی ہیں۔ عام طور پر ان کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ پر منحصر ہوگی۔ سوائے ترسیمی تغیر کے اور کوئی چیز تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے وقوع کو اتنی وضاحت سے ظاہر نہیں کر سکتی، نیز ان تغیرات کو بھی جو تفاعل کی قیمتیں اختیار کرتی ہیں۔

16

دئے ہوئے کثیر الارقام کو مرتسم کرتے وقت تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں سے واقف ہونا منحنی کو مرتسم کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے کیونکہ ان سے ان نقطوں کے محل حاصل ہوتے ہیں جہاں منحنی محور کے متوازی ہو جاتا ہے۔ کسی آیندہ باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ ان نقطوں کا تعین ایسی مساوات کے حل پر منحصر ہوتا ہے جس کا درجہ دئے ہوئے تفاعل کے درجہ سے بقدر ایک کے کم ہو۔

یہ بتانا آسان ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتی ہیں کیونکہ ایک قیمت اعظم کے جواب میں متغیر کی ایک قیمت حاصل ہوگی اور دوسری قیمت اعظم کے جواب میں دوسری۔ جب متغیر اپنی پہلی قیمت سے دوسری قیمت تک بڑھتا ہے تو تفاعل گھٹنے سے ابتدا کرتا ہے اور بڑھنے پر ختم ہوتا ہے اور اس لئے ان دو اعظم قیمتوں کے درمیان کسی منزل پر ایک اقل قیمت اختیار کرتا ہے۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دو اقل قیمتوں کے درمیان ایک اعظم قیمت ہونی چاہیئے۔

دوسرا باب

مساواتوں کے عام خواص

۱۴۔ تفاعل ف (لا) کو مرتسم کرنے کا عمل جس کی تشریح دفعہ (۱۰) میں کی گئی ہے ایک دی ہوئی عددی مساوات کی حقیقی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنے میں استعمال ہوسکتا ہے کیونکہ جب کسی تفاعل سے جو اس سے بنا منحنی کو صحیح طور پر مرتسم کر لیا جاتا ہے تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلیں مبدء سے ان نقطوں کے فاصلوں کو ناپنے سے تقریبی طور پر معلوم ہوتی ہیں جن پر منحنی محور کو قطع کرتا ہے۔ اس مسئلہ کا عددی حل زیادہ صحیح طور پر معلوم کرنے اور نیز عددی اور جبری دونوں قسم کی مساواتوں پر بحث کرنے کے خیال سے اس باب میں ہم مساواتوں کی اہم ترین عام خاصیتوں کو اصلوں کی تعداد، ان کے وجود اور حقیقی و خیالی اصلوں کے درمیان فرق کے حوالے سے ثابت کریں گے۔

مسئلہ ذیل کی مدد سے اکثر یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ کسی مساوات میں حقیقی اصل کا وجود ہے یا نہیں۔

مسئلہ۔ اگر کسی نیز انداز تام ف (لا) میں مجہول مقدار لا کی بجائے دو حقیقی مقداریں ا اور ب درج کی جائیں اور اگر ان اندراجات کے نتیجے مختلف العلامت ہوں یعنی ایک منفی اور دوسرا مثبت تو مساوات ف (لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوگی جس کی قیمت ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی۔

ہم نے دفعہ (۷) میں یہ ثابت کیا ہے کہ تفاعل ف (لا) کی ایک خاصیت

اس کا تسلسل ہے۔ مسئلہ بالا تفاعل کی اس خاصیت سے فوراً اخذ ہوسکتا ہے کیونکہ جب لا ا سے ب تک بدلتا ہے تو ف (لا) بھی ف (ا) سے ف (ب) تک مسلسل بدلتا ہے اور اس لئے تمام درمیانی قیمتوں کو یکے بعد دیگرے اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ ف (ا) اور ف (ب) میں سے ایک مقدار مثبت اور دوسری منفی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا اور ب کے درمیان لا کی کسی خاص قیمت کے لئے جو ف (لا) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہے ف (لا) صفر قیمت اختیار کرتا ہے۔

20 تفاعل کی ترسیم معلوم کرنے سے طالب علم کو اس مسئلہ کے سمجھنے میں بہت مدد ملیگی یہاں جو بات ثابت کی گئی ہے اسے شکل دیکھنے سے بالکل واضح ہو جائیگی وہ یہ ہے کہ اگر کثیر الارقام کو تعبیر کرنے والے منحنی کے دو نقطے محور لا کی مخالف سمتوں میں ہوں یعنی ایک نقطہ محور لا کے اوپر اور دوسرا اس کے نیچے تو ان نقطوں کو ملانے والا منحنی محور کو کم از کم ایک بار قطع کرے گا۔ شکل دیکھنے سے یہ بھی معلوم ہوگا کہ ا اور ب کے درمیان مختلف قیمتیں ہوسکتی ہیں جن کے لئے ف (لا) = ۰ یعنی جن کے لئے منحنی محور کو قطع کرتا ہے

مثلاً دفعہ (۱۰) شکل (۳) میں لا = -۲ سے تفاعل کی منفی قیمت (-۱۴۴) اور لا = ۲ سے تفاعل کی مثبت قیمت (۲۰) حاصل ہوتی ہے اور ان نقطوں کے درمیان منحنی محور لا کو تین جگہ قطع کرتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر کوئی ایسی حقیقی مقدار موجود نہ ہو جس کے اندراج سے ف (لا) = ۰ ہو جائے تو لا کی ہر حقیقی قیمت کے لئے ف (لا) مثبت ہونا چاہیئے۔

کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ (دفعہ ۴) لا = ∞ رکھنے سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے اور اس لئے لا کی کوئی قیمت اس کو منفی نہیں بنا سکتی اس وجہ سے کہ اگر اس قسم کی کوئی قیمت ہو تو اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات کی ایک حقیقی اصل موجود ہونی چاہیئے اور یہ ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ ترسیمی طریقہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے :۔ جب مساوات ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل حقیقی نہ ہو تو ف (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور لا کے

اوپر واقع ہوگا۔

۱۳ ۔ مسئلہ ۔ طاق درجے کی ہر مساوات میں کم از کم ایک حقیقی اصل ایسی ہوتی ہے جسکی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت سے مختلف ہوگی۔

دفعہ ماسبق کے مسئلہ سے یہ نتیجہ فوراً اخذ ہوتا ہے۔ کثیر الارقام ف(لا) میں لا کی بجائے علی الترتیب - ∞، ۰، + ∞ مندرج کرو تو ن کے طاق ہونے کی وجہ سے (دیکھو دفعہ (۴)) نتیجے ہونگے

لا = - ∞ کے لئے ف(لا) منفی

لا = ۰ کے لئے ف(لا) کی علامت وہی جو اں کی ہے

لا = + ∞ کے لئے ف(لا) مثبت

اگر اں مثبت ہو تو - ∞ اور ۰ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی منفی اصل ہونی چاہیئے۔

اور اگر اں منفی ہو تو صفر اور ∞ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی مثبت اصل ہونی چاہیئے۔ اس طرح مسئلہ بالا ثابت ہوگیا۔

۱۴ ۔ مسئلہ ۔ جفت درجہ کی ہر مساوات میں جسکی آخری رقم منفی ہو کم از کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

اس صورت میں - ∞، ۰، + ∞ کے اندراج سے نتیجے ہونگے

لا کی قیمت	ف(لا) کی علامت
- ∞	+
۰	−
+ ∞	+

پس - ∞ اور صفر کے درمیان ایک حقیقی اصل اور صفر اور + ∞ کے درمیان دوسری حقیقی اصل موجود ہونی چاہیئے یعنی کم از کم ایک حقیقی منفی اصل اور ایک حقیقی مثبت اصل موجود ہونی چاہیئے۔

اس دفعہ اور دفعہ ماسبق دونوں میں ہم نے صرف اصلوں کا وجود ثابت کرنے پر اکتفا کی ہے اور اس مقصد کے لئے لا کی بجائے بہت بڑی مثبت یا منفی قیمتیں

درج کرنا کافی ہے جیسا کہ ہم نے کیا ہے۔ لیکن دفعہ ۴ کے مسئلہ کی مدد سے اُن حدود کو تنگ کرنا فی الواقعی ممکن ہے جن کے اندر مساوات کی اصلیں واقع ہوتی ہیں کسی آئندہ باب میں اصلوں کے حدود سے متعلق ایسے مسئلے دیئے جائیں گے جن کی مدد سے متذکرہ حدود کو اور زیادہ تنگ کرنا ممکن ہو جائے گا۔

۱۵۔ عام مساوات میں ایک اصل کی صورت میں خیالی اصلیں۔

ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ہر مساوات کی ایک حقیقی اصل ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ مساوات جفت درجہ کی ہو جس کی آخری رقم مثبت ہو۔ ایسی مساوات کے لئے یہ ممکن ہے کہ اس کی کوئی حقیقی اصل موجود نہ ہو۔ ایسی صورت میں یہ امتحان کرنا ضروری ہے کہ آیا کوئی ایسی قیمتیں موجود ہیں جن میں خیالی اکائی $\sqrt{-1}$ شامل ہے اور جن کو لا کی بجائے درج کرنے سے کثیر الارقام صفر کے مساوی ہو جاتا ہے۔ یا یہ کہ بعض صورتوں میں متغیر کی حقیقی اور خیالی دونوں قیمتیں ہیں جو مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ ہم ایک سادہ مثال لیتے ہیں جس سے اس بات کی توضیح ہو جائے گی کہ مساواتوں کی خیالی اصلیں بھی ہو سکتی ہیں۔ جیسا کہ ہم پہلے بیان کر چکے ہیں (دفعہ ۱۰) کثیر الارقام

$$ف(لا) = ۲\,لا^{۲} + لا + ۲$$

کے جواب میں جو منحنی ملتا ہے وہ کُلاً محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے (دیکھو شکل (۴))۔

شکل (۴)

مساوات ف (لا) = ۰ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے لیکن اس کی دو خیالی اصلیں

$$-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}\sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}\sqrt{-1}$$

موجود ہیں جو مساوات درجۂ دوم

22

کو حل کرنے سے ظاہر ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی قیمتوں کی عدم موجودگی میں بصورت موجودہ دو خیالی جملے ایسے ہیں جو کثیر الارقام کو صفر کے مساوی بنا دیتے ہیں۔

چنانچہ عام مسئلہ یہ ہے کہ ہر منطق کملہ مساوات میں ایک اصل شکل

$$ع + ب \sqrt{-1}$$

کی ہوتی ہے جہاں ع اور ب حقیقی محدود مقداریں ہیں۔ اس بیان میں حقیقی اور خیالی دونوں اصلیں شامل ہیں کیونکہ ب = ۰ سے حقیقی اصل ملیگی۔ جب ع اور ب عدد ہوں تو جملہ $ع + ب\sqrt{-1}$ کو ملتف عدد کہتے ہیں۔ جو کچھ ہم نے دعویٰ کیا ہے وہ یہ ہے کہ ہر عددی مساوات میں ایک حقیقی یا ملتف اصل ہوتی ہے۔

چونکہ اس مسئلہ کے ثبوت میں ایسے اصولوں سے واسطہ پڑے گا جن کو یہاں بیان کرنا خالی از وقت نہیں ہے اور جو اپنے اپنے وقت پر اس کتاب کے مختلف حصوں میں بیان ہونگے اس لئے ہم ان اصولوں کے ثابت ہونے تک اس مسئلہ کے ثبوت کو ملتوی کرتے ہیں۔ فی الحال ہم مسئلہ بالا کو تسلیم کئے لیتے ہیں اور اور اس سے چند نتیجے اخذ کرتے ہیں۔

۱۶۔ مسئلہ۔ ن درجے کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہونگی اور اس سے زیادہ نہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل کوئی مقدار ھ ہو تو ف (لا)، (لا - ھ) سے پورا پورا تقسیم ہو جائے گا۔ یہ بات دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کیونکہ اگر ف (ھ) = ۰۔ یعنی اگر ف (لا) = ۰ کی اصل ھ ہو تو اسکو صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔

اب فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے

$$ف(لا) \equiv لا^{ن} + ب_1 لا^{ن-1} + ب_2 لا^{ن-2} + \dots + ب_{ن-1} لا + ب_ن = 0$$

اس مساوات کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہونی چاہیئے (دفعہ ۱۵) جسکو ہم علامت عم سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ ف (لا) کو لا - عم سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت

$ف_{۱}(لا)$ حاصل ہوتا ہے۔ تو ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$ف(لا) \equiv (لا - ع_{۱})\, ف_{۱}(لا)$$

پھر مساوات $ف_{۱}(لا) = ۰$، $(ن - ۱)$ درجہ کی ایک مساوات ہے، اس کی بھی ایک اصل ہونی چاہیئے جسکو ہم $ع_{۲}$ سے تعبیر کرینگے۔

فرض کرو کہ $ف_{۱}(لا)$ کو $لا - ع_{۲}$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت $ف_{۲}(لا)$ ہے۔ تو

$$ف_{۱}(لا) \equiv (لا - ع_{۲})\, ف_{۲}(لا)$$

اور $\therefore\ ف(لا) \equiv (لا - ع_{۱})(لا - ع_{۲})\, ف_{۲}(لا)$

جہاں $ف_{۲}(لا)$، $ن - ۲$ درجہ کا جملہ ہے۔

اس عمل کو جاری رکھ کر ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ $ف(لا)$، ن اجزائے ضربی اور ایک عددی جزو ضربی $ف_{ن}(لا)$ کا حاصل ضرب ہے۔ قبل الذکر اجزائے ضربی میں سے ہر ایک میں لا کی صرف پہلی قوت ہی داخل ہوتی ہے۔ اب $لا^{ن}$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ $ف_{ن}(لا) = ۱$۔ اس لئے مساوات متماثلہ

$$ف(لا) \equiv (لا - ع_{۱})(لا - ع_{۲})(لا - ع_{۳}) \ldots\ldots (لا - ع_{ن-۱})(لا - ع_{ن})$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے مقداروں $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$ ...... $ع_{ن}$ میں سے کوئی ایک درج کی جائے تو یہ رکن صفر کے مساوی ہوتا ہے اور اسلئے $ف(لا)$ بھی صفر کے مساوی ہوگا۔ یعنی مساوات $ف(لا) = ۰$ کی اصلیں یہ مقداریں $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$ ..... $ع_{ن}$ ہیں۔ ان اصلوں کے علاوہ کوئی اور اصلیں نہیں ہوسکتیں کیونکہ $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$ ... $ع_{ن}$ کے علاوہ کوئی اور مقدار مساوات یا لا کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے درج کی جائے تو اس رکن کا کوئی جزو ضربی صفر نہیں ہوتا اور اس لئے حاصل ضرب صفر کے مساوی

نہیں ہو سکتا۔

نتیجہ صریح ۔ لا میں ن ویں درجہ کے دو کثیر الارقام لا کی ن قیمتوں سے زیادہ کے لئے ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کہ جب دونوں متماثلاً مساوی ہوں ۔

کیونکہ اگر ان کے فرق کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں ن ویں درجہ کی مساوات ملے گی جو صرف لا کی ن قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ہر سر علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہو۔

24

اگرچہ کہ اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات ف (لا) = ۰ کو حل کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اس کی مدد سے اس کے عکس کو ہم پوری طرح حل کر سکتے ہیں یعنی جب مساوات کی اصلیں دی گئی ہوں تو مساوات معلوم ہو سکتی ہے ۔ دی ہوئی اصلوں میں سے ہر ایک کو لا میں سے تفریق کرو ۔ تو جتنی اصلیں ہیں اتنے ثنائی جملے حاصل ہونگے ۔ ان ثنائی جملوں کو باہم ضرب دو تو مطلوبہ مساوات حاصل ہو جائے گی ۔

اس مسئلہ کا ایک اور فائدہ یہ ہے کہ جب دی ہوئی مساوات کی ایک یا ایک سے زیادہ اصلیں دی گئی ہوں تو ایسی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جسکی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں ۔ اس غرض کے لئے ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دئے ہوئے ثنائی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے دی ہوئی مساوات کو تقسیم کر دیا جائے خارج قسمت مطلوبہ کثیر الارقام ہوگا جو باقی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوگا ۔

امثلہ

۱ ــــ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ہیں

− ۳ ، − ۱ ، ۴ ، ۵ ،

جواب :- $لا^{۴} - ۵ لا^{۳} - ۱۳ لا^{۲} + ۵۳ لا + ۶۰ = ۰$

۲ ــــ مساوات

$لا^{۴} - ۶ لا^{۳} + ۸ لا^{۲} - ۱۷ لا + ۱۰ = ۰$

کی ایک اصل ۵ ہے ۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں باقی نا معلوم اصلیں ہوں ۔ دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ استعمال کرو۔

جواب:- $لا^{۳} - لا^{۲} + ۳لا - ۲ = ۰$

۳ — مساوات

$$لا^{۴} - ۱۶لا^{۳} + ۸۶لا^{۲} - ۱۷۶لا + ۱۰۵ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۷ ہیں۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب: باقی دو اصلیں ۳، ۵ ہیں۔

۴ — ایک مساوات کی اصلیں

$$-\frac{۳}{۲}،\ ۳،\ \frac{۱}{۷}$$

ہیں۔ اس مساوات کو معلوم کرو۔

جواب:- $۱۴لا^{۳} - ۲۳لا^{۲} - ۶۰لا + ۹ = ۰$

۵ — کعبی مساوات

$$لا^{۳} - ۱ = ۰$$

کو حل کرو۔

یہاں یہ ظاہر ہے کہ لا = ۱، مساوات کو پورا کرتا ہے۔ لا - ۱ سے تقسیم کرکے خارج قسمت کو حل کرو تو باقی دو اصلیں ہونگی

$$-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{-۳}،\ -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sqrt{-۳}$$

۶ — ایک مساوات کی ایک غیر منطق اصل ہے

$$\sqrt{ف} + \sqrt{ق}$$

ہے۔ اس مساوات کو معلوم کرو اس طرح کہ اس کے سر منطق ہوں۔

جذری علامتوں کے مختلف اجتماعوں کی بموجب اس جملہ کی چار مختلف قیمتیں ہونگی یعنی

$$\sqrt{ف} + \sqrt{ق}،\ -\sqrt{ف} - \sqrt{ق}،\ \sqrt{ف} - \sqrt{ق}،\ -\sqrt{ف} + \sqrt{ق}$$

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

$$(لا - \sqrt{ف} - \sqrt{ق})(لا + \sqrt{ف} + \sqrt{ق})(لا - \sqrt{ف} + \sqrt{ق})(لا + \sqrt{ف} - \sqrt{ق}) = ۰$$

یا $(لا^{۲} - ف - ق - ۲\sqrt{ف ق})(لا^{۲} - ف - ق + ۲\sqrt{ف ق}) = ۰$

یا بالآخر

$$لا^{۴} - ۲(ف + ق)لا^{۲} + (ف - ق)^{۲} = ۰$$

25

۱۷۔ مساوی اصلیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) کے ن اجزائے ضربی میں سے سب کا ایک دوسرے سے مختلف ہونا ضروری نہیں ہے مثلاً جزو ضربی لا − عہ کی دوسری قوت یا اس سے بڑی قوت بشرطیکہ یہ ن سے متجاوز نہ ہو داخل ہوسکتی ہے۔ ایسی صورت میں ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ن اصلیں ہیں جن میں سے دو یا زیادہ ایک دوسرے سے مساوی ہیں۔ اصلوں کو مساوات کی ضعفی اصلیں کہتے ہیں یعنی دوہری تہری وغیرہ بہ حسب اس تعداد کے جتنے بار جزو ضربی تکرار پاتا ہے۔

دفعہ (۱۰) شکل (۲) کی ترسیم دیکھنے سے ضعفی اصلوں کا واقع ہونا سمجھ میں آجائیگا اس شکل کا معائنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات ۱۰ لا³ − ۱۷ لا² + لا + ۶ = ۰ کی دو مثبت اصلیں تقریباً مساوی ہیں اور ہم یہ تصور کرسکتے ہیں کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک چھوٹا عدد جمع کردیا گیا ہے جس کے معنی یہ ہیں کہ پورے منحنی کو چھوٹے فاصلہ میں اوپر وار متوازی حرکت دی گئی ہے تو اس کا اثر یہ ہوگا کہ اصلیں جو ابتدا میں تقریباً مساوی تھیں اب بالکل مساوی ہوجائینگی۔ ایسی صورت میں خط د لا منحنی کو دو ممتاز نقطوں پر قطع نہیں کرے گا بلکہ اُس کو مس کریگا۔ جب کوئی خط منحنی کو مس کرتا ہے تو یہ کہنا مناسب ہے کہ خط منحنی کو ایک نقطہ پر نہیں بلکہ دو **منطبق نقطوں** پر ملتا ہے۔ وہ طالب علم جو مستوی منحنیوں کے نظریہ سے واقف ہے بلا تکلف اسی طرح تہری یا اس سے زیادہ ضعفی اصل کے واقع ہونے کی تشریح مثالوں سے کرسکتا ہے۔

مساوی اصلیں، حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان ملانے والی کڑی کا کام کرتی ہیں۔

ہم نے ابھی دیکھا ہے کہ دو حقیقی اصلیں رکھنے والا کثیر الارقام ذراسی تبدیلی سے ایسی شکل میں بدلجاتا ہے جس میں دو حقیقی اصلیں مساوی ہوجاتی ہیں۔ اگر اور ذراسی تبدیلی کردی جائے تو ہم کثیر الارقام کو ایسی شکل میں بدل سکتے ہیں جس میں یہ دو اصلیں خیالی ہوجائیں۔

فرض کرو کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک اور چھوٹا عدد اضافہ کرنے سے اس کو مکرر بدل دیا گیا ہے تو ہمیں اس کی ایسی ترسیم ملے گی جس میں محور و لا منحنی کو صرف ایک حقیقی نقطہ پر قطع کریگا یعنی اس نقطہ پر جو منفی اصل کے جواب میں ہے۔ وہ دو نقطے جو مثبت اصلوں کے جواب میں تھے اب غائب ہو جائیں گے۔

مثلاً کثیر الارقام $۱۰ لا^۳ - ۱۷ لا^۲ + لا + ۲۸$ پر غور کرو جو دفعہ ۱۰ مثال (۱۲) کے کثیر الارقام میں ۴۲ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا ہے اسکی ترسیم کو بآسانی کھینچا جا سکتا ہے شکل ۴ کے نقطہ ۱ کے جواب میں اب ایک ایسا نقطہ حاصل ہوگا جو محور لا کے بہت اوپر واقع ہوگا۔ لا + ۱ سے تقسیم کرو اور سہ رقمی جملہ (Trinomial تین رقموں والا جملہ) $۱۰ لا^۲ - ۲۷ لا + ۲۸$ حاصل کرو جس میں بقیہ دو اصلیں موجود ہونگی۔ یہ دو اصلیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں اور وہ ہیں

$$\frac{۲۷}{۲۰} + \frac{\sqrt{۳۹۱}}{۲۰}\sqrt{-۱} \quad ، \quad \frac{۲۷}{۲۰} - \frac{\sqrt{۳۹۱}}{۲۰}\sqrt{-۱}$$

ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ جب کثیر الارقام کی شکل بدلی جاتی ہے اس غرض سے کہ ایک اصل غائب ہو جائے تو اس کے ساتھ ایک دوسری اصل بھی غائب ہو جاتی ہے اور ان کی جگہ خیالی اصلوں کا ایک زوج لیتا ہے۔ اس کا سبب آئندہ دفعہ کے مسئلہ سے واضح ہوگا۔

۱۸۔ مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ثابت شدنی کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے

اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل خیالی جملہ $عہ + بہ\sqrt{-۱}$ ہو اور مساوات کے تمام سر حقیقی مقداریں ہوں تو اس کی ایک اور اصل مزدوج خیالی جملہ $عہ - بہ\sqrt{-۱}$ بھی ہونی چاہیئے۔

مساوات ذیل متماثلہ ہے

$$(لا - عہ - بہ\sqrt{-۱})(لا - عہ + بہ\sqrt{-۱})$$
$$\equiv (لا - عہ)^۲ + بہ^۲$$

فرض کرو کہ کثیر رقمی[1] ف (لا) کو اس متماثلہ کے بائیں رکن سے تقسیم کیا گیا ہے اور اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ باقی سا لا + سَا ہے تو مساوات متماثلہ ہے گی

ف (لا) ≡ { (لا − عہ)^2 + بہ^2 } ق + سا لا + سَا

جہاں ق، (ن − ۲) درجی خارج قسمت ہے۔ اس مساوات متماثلہ میں لا کی بجائے عہ + بہ $\sqrt{-1}$ درج کرو تو بموجب فرض ف (لا) صفر ہوگا لیکن اس سے (لا − عہ)^2 + بہ^2 بھی صفر ہوتا ہے۔ اسلئے

سا (عہ + بہ $\sqrt{-1}$) + سَا = ۰

جس سے ہمیں دو مساواتیں

سا عہ + سَا = ۰، سا بہ = ۰

ملتی ہیں کیونکہ حقیقی و خیالی حصے ایک دوسرے کو صفر نہیں بنا سکتے اور اس لئے ان کو علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔ پس

سا = ۰، سَا = ۰

اس طرح باقی سا لا + سَا صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے ف (لا) دو اجزائے ضربی

لا − عہ − بہ $\sqrt{-1}$ ، لا − عہ + بہ $\sqrt{-1}$

کے حاصل ضرب سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل عہ + بہ $\sqrt{-1}$ کے ساتھ عہ − بہ $\sqrt{-1}$ کو بھی اصل ہونا چاہیئے۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی سروں والی کسی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد ہمیشہ جفت ہوتی ہے اور ہر کثیر رقمی کو حقیقی اجزائے ضربی سے ترکیب یافتہ خیال کیا جا سکتا ہے جس میں خیالی اصلوں کے ہر زوج سے ایک حقیقی دو درجی جزو ضربی اور ہر حقیقی اصل سے ایک مفرد حقیقی جزو ضربی پیدا ہوتا ہے۔ کثیر رقمی کو ایسے اجزائے ضربی میں عملاً تحویل کر دینا مساوات کو پوری طرح حل کرنا ہے۔

ہم نے دفعہ ۱۷ میں یہ بیان کیا تھا کہ مساوی اصلوں کو حقیقی اور خیالی

27

[1] کثیر الارقام کو کثیر رقمی بھی کہا جاتا ہے۔

اصلوں کے درمیان ملانیوالی کڑی خیال کیا جاسکتا ہے اس بیان کو اب دوسرے نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کثیر رقمی کا ایک دو درجی جزو ضربی (لا - ع)^{۲} + ک ہے اور فرض کرو کہ ک کی قیمت میں چھوٹی تبدیلیوں کے ذریعہ کثیر رقمی کی شکل تبدیل کی گئی ہے۔ جب ک منفی ہوتا ہے تو اس دو درجی جزو ضربی سے حقیقی اصلوں کا ایک زوج حاصل ہوتا ہے۔ جب ک = ۰ تو اس جزو ضربی سے دو مساوی اصلیں ع، ع حاصل ہوتی ہیں اور جب ک مثبت ہو تو دو خیالی اصلیں ملتی ہیں۔

بالکل ایسے ہی ثبوت سے جیسے اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ شکل ع ± $\sqrt{\text{ج}}$ کی اصم اصلیں مساواتوں میں زوج زوج داخل ہوتی ہیں جبکہ مساواتوں کے سر منطق ہوں۔

مثالیں

۱۔ وہ منطق کعبی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

۱، ۳ + ۲ $\sqrt{-۱}$

جواب: لا^{۳} - ۷ لا^{۲} + ۱۹ لا - ۱۳ = ۰

۲۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی دو اصلیں ہیں

۱ + ۵ $\sqrt{-۱}$، ۵ - $\sqrt{-۱}$

جواب: لا^{۴} - ۱۲ لا^{۳} + ۷۲ لا^{۲} - ۳۱۲ لا + ۶۷۶ = ۰

۳۔ مساوات

لا^{۴} + ۲ لا^{۳} - ۵ لا^{۲} + ۶ لا + ۲ = ۰

کی ایک اصل

-۲ + $\sqrt{۳}$

ہے دوسری اصلیں معلوم کرو۔ جواب: -۲ ± $\sqrt{۳}$، ۱ + $\sqrt{-۱}$

۴۔ مساوات

۳ لا^{۳} - ۴ لا^{۲} + لا + ۸۸ = ۰

کی ایک اصل ۲ + √-۳ ہے۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب: ۲ ± √-۳ ، - ۴/۳

۱۹ — ڈیکارٹ کا قانون علامت - مثبت اصلیں — اس قانون کو استعمال کر کے کسی دی ہوئی مساوات کا صرف معائنہ کرنے سے ہم اس کی مثبت اصلوں کی تعداد کے لئے ایک علوی حد مقرر کر سکتے ہیں - اس قانون کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

مساوات کی سب رقموں کو دائیں جانب منتقل کر کے بائیں جانب صفر رکھا جائے تو اس کے پہلے رکن کی رقموں میں + سے - اور - سے + علامت کی جتنی تبدیلیاں ہونگی ان سے زیادہ مساوات کی مثبت اصلیں نہیں ہو سکیں۔

ہم فی الحال صرف ایک ثبوت پر اکتفا کریں گے جو عموماً دیا جاتا ہے۔ یہ ثبوت ڈیکارٹ کے اس مشہور مسئلہ کا ثبوت نہیں کہلایا جا سکتا بلکہ اس کو اس مسئلہ کی صرف تصدیق کہنا زیادہ بہتر ہوگا۔ [illegible] قانون اور دیگر مسائل پر قوانین جو متعلق ہیں۔ مساواتوں کی مثبت اصلی اور خیالی اصلوں کی تعداد سے متعلق [illegible] (Budan) اور فوریر (Fourier) کے [illegible] کے طور پر اخذ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی کثیر رقمی کی علامتیں ایک کے بعد دیگرے ترتیب ذیل میں پیش ہوتی ہیں

$$+ + - - + - - - + + - + -$$

اس میں علامت کی تبدیلیاں کل سات ہیں جس میں + سے - اور - سے + دونوں قسم کی تبدیلیاں شامل ہیں - یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اگر اس کثیر رقمی کو ایک ثنائی جز سے ضرب دیا جائے جس کی علامتیں ایک مثبت اصل کے جواب میں ہیں تو حاصل ضرب کثیر رقمی میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ابتدائی کثیر رقمی کے بہ نسبت کم از کم بقدر ایک کے زیادہ ہوگی۔

(29)

ہم صرف علامتوں کو لکھتے ہیں جو عمل ضرب میں واقع ہوتی ہیں۔ اس طرح

$$\begin{array}{l} - + - + + - - - + - + + \\ + - + - - + + + - + - - \\ \hline + - + - \pm + \mp \mp - + - \pm + \end{array}$$

یہاں تیسری سطر میں جہاں کہیں دو مختلف العلامت رقموں کو جمع کرنا ہے وہاں مبہم علامت رکھی گئی ہے۔ اس صورت میں ہم دیکھتے ہیں (اور کسی دوسری ترتیب میں بھی یہی بات پیدا ہوگی) کہ عمل ضرب کا اثر یہ ہوتا ہے کہ مبہم علامت ایسی جگہ داخل ہوتی ہے جہاں ابتدائی کثیر رقمی میں + کے بعد + یا − کے بعد − علامت آتی ہے۔ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ہرگز نہیں گھٹتی۔ لیکن ہمیشہ ایک تبدیلی آخر میں ضرور پیدا ہوتی ہے۔ اوپر کی مثال میں جہاں ابتدائی کثیر رقمی علامت کی ایک تبدیلی پر ختم ہوتا ہے یہ نتیجہ ظاہر ہے اگر کثیر رقمی ایک ہی علامت کی تکرار پر ختم ہو تو بھی یہ معلوم ہوگا کہ حاصل کثیر رقمی میں اس کے متناظر ابہام سے علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہوگا۔ یہ تبدیلی پچھلی علامت کے ساتھ ہوگی یا جمع شدہ زائد علامت کے ساتھ۔ پس ایسی نادرالوقوع صورت میں بھی جس میں ابتدائی کثیر رقمی میں علامت کی تکراروں سے حاصل کثیر رقمی میں علامت کی تکراریں باقی رہتی ہیں ایک تبدیلی جمع ہوتی ہے۔ پس ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ کثیر رقمی کو ثنائی جملہ لا − عہ سے ضرب دیا جائے تو کم از کم علامت کی ایک زائد تبدیلی داخل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ کثیر رقمی ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے بنا ہے جو منفی اور خیالی اصلوں کے جواب میں ہیں مثبت اصلوں عہ، بہ، جہ وغیرہ کے متناظر اجزائے ضربی لا − عہ، لا − بہ، لا − جہ، وغیرہ میں سے ہر ایک سے اس کثیر رقمی کو ضرب دینے کا اثر یہ ہوگا کہ ہر ایک جزو ضربی کے جواب میں علامت کی کم سے کم ایک تبدیلی داخل ہوگی۔ اس طرح جب تمام اصلوں کے جواب میں مکمل حاصل ضرب ملجاتا ہے تو ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ حاصل کثیر رقمی میں

علامت کی کم از کم اتنی تبدیلیاں موجود ہیں جتنی کہ اس کی مثبت اصلیں ہیں۔ یہی ڈیکارٹ کا مسئلہ ہے۔

۲۰ ۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت ۔ منفی اصلیں ۔ منفی اصلوں

کی صورت میں ڈیکارٹ کا قانون بیان کرنے سے پیشتر ہم ثابت کریں گے کہ اگر مساوات ف (لا) = ۰ میں لا کی بجائے ۔ لا مندرج کیا جائے تو حاصل مساوات کی اصلیں وہی ہونگی جو ابتدائی مساوات کی ہیں سوائے اس کے کہ ان کی علامتیں بدلجائیں گی۔ دفعہ ۱۶ کی مساوات متماثلہ

ف (لا) = (لا ۔ ع۱) (لا ۔ ع۲) (لا ۔ ع۳) ۔۔۔۔۔۔ (لا ۔ عن)

سے یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کیونکہ اس مساوات سے ہم اخذ کرتے ہیں

ف (۔ لا) = (۔۱)^ن (لا + ع۱) (لا + ع۲) (لا + ع۳) ۔۔۔۔۔۔ (لا + عن)

اس سے ظاہر ہے کہ ف (۔ لا) = ۰ کی اصلیں ہیں

۔ع۱ ، ۔ع۲ ۔ ع۳ ، ۔۔۔۔۔۔ ۔عن

پس ف (لا) کی منفی اصلیں ف (۔ لا) کی مثبت اصلیں ہونگی اور ہم منفی اصلوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون اس طرح بیان کرسکتے ہیں :۔

مساوات ف (لا) = ۰ کی منفی اصلوں کی تعداد کثیر رقمی ف (۔ لا) کی رقموں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہوسکتی۔

۲۱ ۔ خیالی اصلوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے قانون کا استعمال

ڈیکارٹ کے قانون کے استعمال سے مساواتوں میں خیالی اصلوں کے وجود کا پتہ لگانا اکثر ممکن ہوگا۔ کیونکہ اگر کسی مساوات کی مثبت اصلوں کی بڑی

سے بڑی ممکن تعداد اور منفی اصلوں کی بڑی سے بڑی ممکن تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ سے کم ہو تو خیالی اصلیں یقیناً موجود ہونگی۔ مثال کے طور پر مساوات

$$لا^{۵} + ۱۰ لا^{۳} + لا - ۴ = ۰$$

لو۔ اس مساوات میں چونکہ علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس وجہ سے ایک سے زیادہ مثبت اصل نہیں ہوسکتی۔ اب لا کو ‎-‎لا میں بدلنے سے حاصل ہوگا

$$لا^{۵} - ۱۰ لا^{۳} - لا - ۴ = ۰$$

اب چونکہ اس میں علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس لئے منفی اصلوں کی تعداد ایک سے زیادہ نہیں ہوسکتی۔ اس طرح مجوزہ مساوات میں دو سے زیادہ حقیقی اصلیں موجود نہیں ہوسکتیں۔ اس لئے کم سے کم چھ خیالی اصلیں موجود ہونی چاہئیں۔ ڈیکارٹ کے قانون کا یہ استعمال صرف غیرمکمل مساواتوں کی صورت میں مفید ہے کیونکہ جب مساوات مکمل ہو تو بہ آسانی یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ف (لا) اور ف (‎-‎لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ کے بالکل مساوی ہوتا ہے۔

۲۲۔ **مسئلہ**۔ اگر کثیر رقمی ف (لا) میں لا کی بجائے دو عدد ا اور ب مندرج کرنے سے نتیجے مختلف العلامت حاصل ہوں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی طاق تعداد ان عددوں کے درمیان واقع ہوگی۔ لیکن اگر نتیجے ہم علامت ہوں تو ان عددوں کے درمیان یا تو کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوگی یا حقیقی اصلوں کی جفت تعداد واقع ہوگی۔

اس مسئلہ میں اُن نتیجوں کی عام سے عام صورت شامل ہے جو کسی مساوات کے پہلے رکن کی علامتوں سے مساوات کی اصلوں کے متعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں جبکہ لا کی بجائے دو دئے ہوئے عدد مندرج کئے جائیں، چنانچہ دفعہ ۱۲ کا مسئلہ اس کی ایک خاص صورت ہے۔ ہم اس مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت کریں گے۔ دوسرے حصہ کو بالکل اسی طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مقادیر ا اور ب کے درمیان مساوات ف (لا) = ۰ کی م اصلیں $عہ_{۱}$، $عہ_{۲}$، $عہ_{۳}$ ..... $عہ_{م}$ واقع ہوتی ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور اصلیں واقع نہیں ہوتیں۔ فرض کرو کہ ا چھوٹا ہے ب سے

فرض کرو کہ جب ف (لا) کو م اجزائے ضربی کے حاصل ضرب (لا − عہ₁)
(لا − عہ₂) (لا − عہ₃) ...... (لا − عہ م) سے تقسیم کیا جاتا ہے تو خارج قسمت
فہ (لا) حاصل ہوتا ہے۔ تو مساوات متماثلہ ملیگی

ف (لا) = (لا − عہ₁) (لا − عہ₂) ...... (لا − عہ م) فہ (لا)

اس میں یکے بعد دیگرے لا = ا ، لا = ب رکھنے سے حاصل ہوگا

ف (ا) = (ا − عہ₁) (ا − عہ₂) ...... (ا − عہ م) فہ (ا)

ف (ب) = (ب − عہ₁) (ب − عہ₂) ...... (ب − عہ م) فہ (ب)

اب فہ (ا) اور فہ (ب) ہم علامت ہیں، کیونکہ اگر ان کی علامتیں مختلف ہوتیں تو دفعہ ۱۲ کی رو سے ان کے درمیان مساوات فہ (لا) = ۰ کی کم سے کم ایک اصل ہوتی۔ بموجب فرض ف (ا) اور ف (ب) کی علامتیں مختلف ہیں اس لئے حاصل ضربوں

(ا − عہ₁) (ا − عہ₂) ...... (ا − عہ م)

(ب − عہ₁) (ب − عہ₂) ...... (ب − عہ م)

کی علامتیں مختلف ہیں۔ لیکن دوسرے کی علامت مثبت ہے کیونکہ اس کے تمام اجزا مثبت ہیں۔ پس پہلے کی علامت منفی ہے لیکن اس کے تمام اجزا منفی ہیں۔ اس لئے ان کی تعداد طاق ہونی چاہیئے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ میں یہ یاد رہے کہ منفی اصلوں کو اتنی مرتبہ شمار کیا گیا ہے جتنی مرتبہ وہ تکرار پاتی ہیں۔

اس دفعہ کے مسئلہ پر ترسیمی طریقہ کا استعمال کرنا فائدہ بخش ہوگا۔ اس نقطۂ نظر سے اس مسئلہ کی صداقت خود واضح ہو جاتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ جب کسی دو نقطوں کو ایک منحنی سے ملایا جاتا ہے تو ان نقطوں کے درمیان منحنی کا حصہ محور لا کو طاق مرتبہ قطع کرتا ہے جبکہ نقطے محور کی مخالف سمتوں میں ہوں اور جفت مرتبہ قطع کرتا ہے

یا بالکل قطع نہیں کرتا جبکہ نقطے محور کی ایک ہی جانب واقع ہوں۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک مساوات کی سب رقموں کی علامتیں مثبت ہوں تو کوئی مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔

۲۔ اگر کسی مکمل مساوات کی رقموں کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو کوئی اصل منفی نہیں ہو سکتی۔

۳۔ اگر ایک مساوات کی پہلی چند رقموں کی علامتیں مثبت ہوں اور ان کے بعد آنے والی رقموں کی علامتیں منفی تو صرف ایک اصل مثبت ہوگی اور اس سے زیادہ نہیں۔

دفعہ ۱۲ استعمال کرو اور صفر اور ∞ کا اندراج کرو۔ دفعہ ۱۹ بھی استعمال کرو۔

۴۔ اگر ایک مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو کوئی حقیقی اصل نہیں ہو سکتی۔

دفعات ۱۹ اور ۲۰ کا استعمال کرو۔

۵۔ اگر ایک مساوات میں لا کی صرف طاق قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو صفر اصل کے سوا کوئی حقیقی اصل نہ ہوگی۔

۶۔ اگر ایک مساوات مکمل ہو تو ف (لا) میں علامت کی تکراروں کی تعداد ف (-لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی۔

۷۔ اگر ایک مکمل مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو مثبت اصلوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی اور منفی اصلوں کی تعداد علامت کی تکراروں کی تعداد کے مساوی۔

۸۔ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو اس کی آخری رقم کی علامت مثبت ہونی چاہیئے اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو اس کی آخری رقم منفی ہونی چاہیئے۔ لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر مثبت لو (دیکھو دفعہ ۴)۔

۹۔ مثال ۸ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو مثبت اصلوں کی تعداد اس جفت عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے جفت عدد کے مساوی۔ اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو مثبت اصلوں کی تعداد اس طاق عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے طاق عدد کے مساوی۔ دوسرے الفاظ میں مثبت

اصلوں کی تعداد جب تبدیلیوں کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ان سے جفت عدد کا فرق رکھتی ہے۔　　صفر اور ∞ کا اندراج کرو اور دفعہ ۲۲ استعمال کرو۔

۱۰ــــ مساوات

$$لا^{۶} - ۳ لا^{۲} - لا + ۱ = ۰$$

میں خیالی اصلوں کی تعداد کی سفلی حد معلوم کرو۔

جواب:۔ کم از کم دو خیالی اصلیں

۱۱ــــ مساوات

$$لا^{۴} + ۱۵ لا^{۲} + ۷ لا - ۱۱ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔　　دفعات ۱۴، ۱۹، ۲۰ استعمال کرو۔

جواب:۔ ایک مثبت، ایک منفی، دو خیالی

۱۲ــــ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{۳} + ق لا + ر = ۰$$

کی ایک اصل منفی اور دو اصلیں خیالی ہیں جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۳ــــ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{۳} - ق لا + ر = ۰$$

کی ایک اصل منفی ہے اور باقی دو اصلیں خیالی ہیں یا دونوں مثبت جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۴ــــ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{ا^{۲}}{لا - ا} + \frac{ب^{۲}}{لا - ب} + \frac{ج^{۲}}{لا - ج} + \ldots\ldots + \frac{ل^{۲}}{لا - ل} = لا - م$$

کی اصل خیالی نہیں ہو سکتی جہاں ا، ب، ج، ...... ل سب کے سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

لا کی بجائے علی الترتیب $عہ + بہ \sqrt{-۱}$ اور $عہ - بہ \sqrt{-۱}$ درج کرو اور پھر تفریق کرو تو ایسا جملہ ملیگا جو صرف $بہ = ۰$ یعنے پر معدوم ہو سکتا ہے۔

۱۵ــــ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$لا^{ن} - ۱ = ۰$$

کی صرف دو حقیقی اصلیں ۱ اور -۱ ہیں اور ان کے علاوہ اور کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو اس مساوات کی صرف ایک حقیقی اصل -۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے۔ یہ اور سوال ۱۶ دفعات ۱۹ اور ۲۰ سے اخذ ہو سکتے ہیں۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = 0$$

کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو صرف ایک حقیقی اصل -۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے۔

۱۷۔ مساوات

$$\text{لا}^4 + 2\,\text{ق}\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ق}^2\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ق}^3\,\text{لا} - \text{ر}^4 = 0$$

کو حل کرو۔

یہ مساوات شکل

$$(\text{لا}^2 + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ق}^2)^2 - \text{ق}^4 - \text{ر}^4 = 0$$

میں لکھی جا سکتی ہے۔

جواب:- $-\frac{1}{2}\text{ق} + \sqrt{-\frac{3}{4}\text{ق}^2 + \sqrt{\text{ق}^4 + \text{ر}^4}}$

جذروں کی علامتوں سے چار اجتماع حاصل ہوتے ہیں اور جملہ بالا میں چار اصلیں شامل ہیں۔

۱۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ

$$2 + \text{ط}\sqrt{3} + \sqrt{11 + \text{ط}\,2\sqrt{3}}$$

کی چار مختلف قیمتیں ہوں جہاں $\text{ط}^2 = 1$۔

اگر ط کے ادخال سے کوئی قید عائد نہ کی جاتی تو اس جملہ کی ۸ قیمتیں ہوتیں یہاں $\sqrt{3}$ کو دوسرے جذر کے اندر اور اس کے باہر دونوں جگہ ایک ہی علامت کے ساتھ لینا چاہیئے۔ اس لئے کل چار قیمتیں ملتی ہیں۔

جواب:- $\text{لا}^4 - 8\,\text{لا}^3 - 12\,\text{لا}^2 + 84\,\text{لا} - 63 = 0$

۱۹۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ

$$-\text{۹} + \text{ط}\sqrt{\text{۱۳۷}} + \text{۳}\sqrt{\text{۴۴} - \text{۲}\,\text{ط}\sqrt{\text{۱۳۷}}}$$

کی چار قیمتیں ہوں جہاں $\text{ط}^{\text{۲}} = -\text{۱}$

جواب:- $\text{لا}^{\text{۴}} + \text{۳۶}\,\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۴۰۰}\,\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳۱۶۸}\,\text{لا} + \text{۴۴۷۷} = \text{۰}$

۲۰۔ منطق سروں والی ایک مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ

$$\text{ط}_{\text{۱}}\sqrt{\text{پ}} + \text{ط}_{\text{۲}}\sqrt{\text{ق}} + \text{ط}_{\text{۳}}\sqrt{\text{ر}}$$

کی تمام قیمتیں ہوں جہاں

$$\text{ط}_{\text{۱}}^{\text{۲}} = \text{۱}،\ \text{ط}_{\text{۲}}^{\text{۲}} = \text{۱}،\ \text{ط}_{\text{۳}}^{\text{۲}} = \text{۱}$$

اس جملہ کی کل ۸ مختلف قیمتیں ہیں یعنی

$$\sqrt{\text{پ}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}\ ،\quad -\sqrt{\text{پ}} - \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}$$

$$\sqrt{\text{پ}} - \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\ ،\quad -\sqrt{\text{پ}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}$$

$$-\sqrt{\text{پ}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}\ ،\quad \sqrt{\text{پ}} - \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}$$

$$-\sqrt{\text{پ}} - \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}\ ،\quad \sqrt{\text{پ}} + \sqrt{\text{ق}} - \sqrt{\text{ر}}$$

فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{ط}_{\text{۱}}\sqrt{\text{پ}} + \text{ط}_{\text{۲}}\sqrt{\text{ق}} + \text{ط}_{\text{۳}}\sqrt{\text{ر}}$$

مربع لینے سے

$$\text{لا}^{\text{۲}} = \text{پ} + \text{ق} + \text{ر} + \text{۲}\left(\text{ط}_{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۳}}\sqrt{\text{ق ر}} + \text{ط}_{\text{۳}}\text{ط}_{\text{۱}}\sqrt{\text{ر پ}} + \text{ط}_{\text{۱}}\text{ط}_{\text{۲}}\sqrt{\text{پ ق}}\right)$$

ارقام کو منتقل کرنے اور پھر مربع لینے سے

$$\left(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{پ} - \text{ق} - \text{ر}\right)^{\text{۲}} = \text{۴}\left(\text{ق ر} + \text{ر پ} + \text{پ ق}\right)$$

$$+\ \text{۸}\,\text{ط}_{\text{۱}}\text{ط}_{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۳}}\sqrt{\text{پ ق ر}}\left(\text{ط}_{\text{۱}}\sqrt{\text{پ}} + \text{ط}_{\text{۲}}\sqrt{\text{ق}} + \text{ط}_{\text{۳}}\sqrt{\text{ر}}\right)$$

ارقام کو منتقل کرتے، $\text{ط}_1\sqrt{\text{پ}} + \text{ط}_2\sqrt{\text{ق}} + \text{ط}_3\sqrt{\text{ر}}$ کی بجائے لا درج کرنے اور مربع لینے سے بالآخر ہمیں مساوات ملتی ہے

$$\left\{\text{لا}^4 - 2\,\text{لا}^2(\text{پ} + \text{ق} + \text{ر}) + \text{پ}^2 + \text{ق}^2 + \text{ر}^2 - 2\,\text{ر پ} - 2\,\text{پ ق}\right\}^2$$

$$= 64\,\text{پ ق ر لا}^2$$

جو جذر کی علامتوں سے آزاد ہے۔

یہ آٹھ درجی مساوات ہے جس کی اصلیں وہ ہیں جو اوپر لکھی گئی ہیں۔

چونکہ ط_1، ط_2، ط_3 غائب ہو چکے ہیں اس لئے ۸ اصلوں $\pm\sqrt{\text{پ}} \pm\sqrt{\text{ق}} \pm\sqrt{\text{ر}}$ میں سے کسی کو لا کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے۔ محصلہ مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ لا میں سے ہر اصل کو تفریق کیا جائے اور پھر ان کو مسلسل ضرب دیا جائے جس طرح دفعہ ۱۶ کی مثال ۶ میں کیا گیا تھا۔

تیسرا باب

مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے درمیان روابط اور اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کا استعمال

۲۳۔ اصلوں اور سروں کے درمیان روابط۔ لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک لینے سے اور دفعہ ۱۶ کی طرح مساوات کی ن اصلوں کو $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ ... ... $ع_ن$ سے تعبیر کرنے سے مساوات متماثلہ ملیگی

$$لا^{ن} + ب_1 لا^{ن-1} + ب_2 لا^{ن-2} + ب_3 لا^{ن-3} + \ldots + ب_{ن-1} لا + ب_ن$$

$$\equiv (لا - ع_1)(لا - ع_2)(لا - ع_3) \ldots (لا - ع_ن) \qquad \ldots\ldots (1)$$

اس متماثلہ کے دوسرے رکن کے اجزا کو باہم ضرب دو۔ حاصل ضرب میں لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم $لا^{ن}$ ہے۔ $لا^{ن-1}$ کا سر ان مقداروں $-ع_1$، $-ع_2$ وغیرہ کا مجموعہ ہے یعنی اصلوں کا مجموعہ جبکہ ان کی علامتیں بدل دی گئی ہوں۔ $لا^{ن-2}$ کا سر ان مقداروں میں سے دو دو کے حاصلضربوں کا مجموعہ ہے۔ $لا^{ن-3}$ کا سر ان مقداروں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے۔ علیٰ ہذا القیاس اور آخری رقم تمام اصلوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ انکی علامتیں بدل دی گئی ہوں۔ اس لئے مساوات متماثلہ (۱) میں طرفین کی متناظر ارقام

کے سروں کو مساوی رکھنے سے مساواتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملیگا

$$
\left.\begin{aligned}
\text{ب}_1 &= -\left(\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}}\right) \\
\text{ب}_2 &= \left(\text{ع}_1\text{ع}_2 + \text{ع}_1\text{ع}_3 + \text{ع}_2\text{ع}_3 + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-1}\text{ع}_{\text{ن}}\right) \\
\text{ب}_3 &= -\left(\text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3 + \text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_4 + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-2}\text{ع}_{\text{ن}-1}\text{ع}_{\text{ن}}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\text{ب}_{\text{ن}} &= (-1)^{\text{ن}}\,\text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3 \cdots \text{ع}_{\text{ن}-1}\text{ع}_{\text{ن}}
\end{aligned}\right\} \cdots (2)
$$

36

ان کی مدد سے ہم اصلوں اور سروں کے درمیان جو روابط ہیں اُن کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ — ہر جبری مساوات میں جس کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو دوسری رقم کا سر ب_1 بہ تبدیل علامت اس کی اصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

تیسری رقم کا سر ب_2، اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

چوتھی رقم کا سر ب_3، بہ تبدیل علامت اصلوں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔ سروں کی علامتیں باری باری سے منفی اور مثبت بدلتی ہیں اور باہم ضرب کھانے والی اصلوں کی تعداد اصلوں کے متناظر تفاعل کی ہر رقم میں بقدر ایک کے بڑھتی ہے یہاں تک کہ ہم اس تفاعل پر پہنچیں جو ن اصلوں کا حاصل ضرب ہے۔

اگر لا^ن کا سر ا_0 ایک نہ ہو (دیکھو دفعہ ۱) تو مساوات کی ہر رقم کو اس سے تقسیم کرنا چاہیئے۔ اس صورت میں اصلوں کا مجموعہ $-\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}$ کے مساوی ہوگا اور ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_0}$ کے مساوی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔

نتیجہ صریح (۱) مساوات کی ہر اصل اس کی مطلق رقم کا ایک مقسوم علیہ ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح (۲) اگر مساوات کی سب اصلیں مثبت ہوں تو سر (بشمول لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کے سر کے) باری باری سے مثبت اور منفی ہونگے۔ اور اگر سب اصلیں منفی ہوں تو سب سر مثبت ہونگے۔ یہ بات مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے۔
[دیکھو دفعات ۱۹ اور ۲۰]

۴۲۔ مسئلہ بالا کے اطلاقات ۔۔۔ دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۲) سے چونکہ سروں اور ن اصلوں کے درمیان جدا جدا ن ربط ملتے ہیں اس لئے ممکن ہے یہ خیال پیدا ہو کہ مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں اس سے کوئی فائدہ ہوگا۔ درحقیقت یہ بات نہیں ہے کیونکہ فرض کرو کہ ان مساواتوں کی مدد سے ہم ابتدائی مساوات کی ایک اصل ع۱ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہ اسیوقت ممکن ہے جبکہ دی ہوئی مساواتوں کی مدد سے دوسری اصلوں کو ساقط کیا جائے اور بالآخر وہ مساوات حاصل کی جائے جس کی ایک اصل ع۱ ہے۔

اب خواہ کسی طریقہ سے یہ آخری مساوات حاصل ہو اس میں اصل ع۱ کے علاوہ دوسری اصلیں ع۲، ع۳ ... عن بھی موجود ہونگی اور ع۱ کے دریافت کرنے میں ان کو بھی دریافت کرنا پڑے گا۔ کیونکہ مساواتوں (۲) میں سب کی سب اصلیں ایک ہی طریقہ سے داخل ہوتی ہیں اور اس لئے اگر باقی دوسری اصلوں کو ساقط کرکے ع۲ کا معلوم کرنا مقصود ہو (یا کسی دوسری اصل کا) تو ہم ایسی مساوات پر پہنچینگے جو ع۱ کے لئے حاصل شدہ مساوات سے صرف اس قدر فرق رکھیگی کہ اصل ع۱ کے بجائے اصل ع۲ (یا وہ دوسری اصل) موجود ہوگی۔ اسلئے عمل اسقاط سے ہمیں ایسی مساوات ملیگی جس کی ن اصلیں ع۱، ع۲ ... عن ہونی چاہئیں اور اسلئے ایسی مساوات کا حل کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا کہ دی ہوئی مساوات کا۔ یہ آخری مساوات فی الحقیقت ابتدائی مساوات ہے جس میں مطلوبہ اصل لا کی

37

بجائے واقع ہوتی ہے۔ چنانچہ ہم کعبی مساوات کی صورت لیکر اس بات کو ثابت کرینگے۔ طریق عمل بالکل عام ہوگا اور اس لئے کسی درجہ کی مساوات پر جاری کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^3 + ب_1 لا^2 + ب_2 لا + ب_3 = 0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔

دفعہ ۲۳ سے ہمیں حاصل ہوگا

$$ب_1 = -(عہ + بہ + جہ)$$

$$ب_2 = عہ بہ + بہ جہ + جہ عہ$$

$$ب_3 = - عہ بہ جہ$$

ان میں سے پہلی مساوات کو $عہ^2$ سے اور دوسری کو عہ سے ضرب دو اور تینوں کو جمع کرو تو

$$ب_1 عہ^2 + ب_2 عہ + ب_3 = - عہ^3$$

یا

$$عہ^3 + ب_1 عہ^2 + ب_2 عہ + ب_3 = 0$$

جو دی ہوئی کعبی مساوات ہے جس میں لا کی بجائے عہ ہے۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی نتیجہ کو ثابت کرنے کے لئے درجہ چہارم کی مساوات لے سکتا ہے۔ عام صورت میں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں کو علی الترتیب $عہ^{ن-1}$، $عہ^{ن-2}$، ...... سے ضرب دیکر انکو جمع کیا جائے۔

اگرچہ مساواتوں (۲) سے مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اکثر عددی مساواتوں کا حل معلوم کرتے وقت ان سے سہولت پیدا ہوتی ہے جبکہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص ربط دئے گئے ہوں۔ ان کو وہ رشتے معلوم کرنے میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جو سروں کے درمیان ہونے چاہئیں جبکہ اصلوں کے درمیان رشتے دئے گئے ہوں۔

مثالیں

۱ — مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{لا}^{۲} - ۱۶\,\text{لا} + ۸۰ = ۰$$

کو حل کرو جبکہ اس کی دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، بہ، جہ، ہیں تو

$$\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} = ۵$$

$$\text{عہ بہ} + \text{عہ جہ} + \text{بہ جہ} = -۱۶$$

$$\text{عہ بہ جہ} = -۸۰$$

$\text{بہ} + \text{جہ} = ۰$ لینے سے ان میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا $\text{عہ} = ۵$،
اور پھر دوسری یا تیسری مساوات سے حاصل ہوگا $\text{بہ جہ} = -۱۶$ ۔ اس طرح بہ اور جہ
کی قیمتیں حاصل ہونگی ۴ اور −۴۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۵، ۴، −۴ ہیں ۔

۲ — مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۴ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں مساوی ہیں حل کرو ۔

فرض کرو کہ اس کی تین اصلیں عہ، عہ، بہ ہیں تو

$$۲\,\text{عہ} + \text{بہ} = ۳$$

$$\text{عہ}^{۲} + ۲\,\text{عہ بہ} = ۰$$

جن سے $\text{عہ} = ۲$، $\text{بہ} = -۱$ حاصل ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۲، ۲، −۱ ہیں۔

۳ — مساوات

$$\text{لا}^{۴} + ۴\,\text{لا}^{۳} - ۲\,\text{لا}^{۲} - ۱۲\,\text{لا} + ۹ = ۰$$

میں مساوی اصلوں کے دو زوج ہیں ۔ اُنہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ، بہ، بہ ہیں تو

$$۲\,\text{عہ} + ۲\,\text{بہ} = -۴$$

$$\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲} + ۴\,\text{عہ بہ} = -۲$$

اِن سے عہ اور بہ کی قیمتیں ۱ اور -۳ حاصل ہونگی۔

۴ — مساوات

$$لا^{۳} - ۹لا^{۲} + ۱۴لا + ۲۴ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں ۳ اور ۲ کی نسبت رکھتی ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں اور ۲ عہ = ۳ بہ تو عہ کے اسقاط سے ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$۵ بہ + ۲ جہ = ۱۸$$

$$۳ بہ^{۲} + ۵ بہ جہ = ۲۸$$

(39)

اِن مساواتوں سے ہمیں بہ میں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

$$۱۹ بہ^{۲} - ۹۰ بہ + ۵۶ = ۰$$

اس کی اصلیں ۴ اور $\frac{۱۴}{۱۹}$ ہیں۔ پہلی اصل سے عہ اور جہ کی قیمتیں ۶ اور -۱ حاصل ہونگی۔ اسلئے مطلوبہ اصلیں ۶، ۴، -۱ ہیں۔

طالب علم یہاں پوچھیگا کہ بہ کی قیمت $\frac{۱۴}{۱۹}$ کا کیا مطلب ہے۔ گذشتہ مثالوں میں بھی یہ دقت پیش آئی ہوگی۔ لیکن یہ معلوم رہے کہ اس نوعیت کی مثالوں میں مطلوبہ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں اصلوں اور سروں کے درمیان تمام روابط کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دی ہوئی شرط سے اصلوں کے درمیان ایک یا زیادہ ربط قائم ہو جاتے ہیں۔ جب کبھی یہ صورت پیدا ہو کہ اثنائے عمل میں استعمال ہونے والی مساواتوں سے اصلوں کے لئے قیمتوں کے ایک نظام سے زیادہ نظام حاصل ہوں تو اصلی اصلیں اس شرط کی مدد سے معلوم ہو سکتی ہیں کہ [illegible] مساوات (یا ان مساواتوں) کو پورا کرتی ہیں جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں اور جن کا استعمال ان اصلوں کو معلوم کرتے وقت نہیں کیا گیا ہے۔ مثلاً موجودہ مثال میں قیمت بہ = ۴ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو منذکرہ مساوات

$$عہ بہ جہ = -۲۴$$

کو پورا کرتا ہے۔ قیمت بہ = $\frac{۱۴}{۱۹}$ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو اس مساوات کو

پورا نہیں کرتا اور اسلئے مسترد کردیا گیا ہے۔

۵ — مساوات

$$\text{لا}^{3} - ۹\,\text{لا}^{2} + ۲۳\,\text{لا} - ۱۵ = ۰$$

کو جس کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کروکہ اصلیں عہ − ضہ، عہ، عہ + ضہ ہیں تو

$$۳\,\text{عہ} = ۹،$$

$$۳\,\text{عہ}^{2} - \text{ضہ}^{2} = ۲۳$$

جن سے ہمیں تین اصلیں ۱، ۳، ۵ حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

$$\text{لا}^{4} + ۲\,\text{لا}^{3} - ۲۱\,\text{لا}^{2} - ۲۲\,\text{لا} + ۴۰ = ۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کروکہ اصلیں عہ − ۳ ضہ، عہ − ضہ، عہ + ضہ، عہ + ۳ ضہ ہیں۔

جواب :۔ −۵، −۲، ۱، ۴

۷ — مساوات

$$۲۷\,\text{لا}^{3} + ۴۲\,\text{لا}^{2} - ۲۸\,\text{لا} - ۸ = ۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کروکہ اصلیں عہ ر، عہ، $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے تیسری مساوات سے ہمیں $\text{عہ}^{3} = \frac{۸}{۲۷}$ یا $\text{عہ} = \frac{۲}{۳}$ حاصل ہوگا اور پھر پہلی یا دوسری مساوات سے ر میں درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔

جواب :۔ −۲، $\frac{۲}{۳}$، $-\frac{۲}{۹}$

(40)

۸ — مساوات

$$۳\,\text{لا}^{4} - ۴۰\,\text{لا}^{3} + ۱۳۰\,\text{لا}^{2} - ۱۲۰\,\text{لا} + ۲۷ = ۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں حل کرو۔

یہاں فرض کروکہ اصلیں $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}^{3}}$، $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$، عہ ر، عہ ر^{3} ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے دوسری اور چوتھی مساوات استعمال کرو۔

جواب :- $\frac{۱}{۳}$ ، ۱ ، ۳ ، ۹

۹ — مساوات

$لا^{۴} + ۱۵ لا^{۳} + ۷۰ لا^{۲} + ۱۲۰ لا + ۶۴ = ۰$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں حل کرو ۔

جواب :- ۱- ، ۲- ، ۴- ، ۸-

۱۰ — مساوات

$۶ لا^{۳} - ۱۱ لا^{۲} + ۶ لا - ۱ = ۰$

کو جسکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو ۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں تو ہمیں ربط ملیگا

$$\frac{۱}{عہ} + \frac{۱}{جہ} = \frac{۲}{بہ}$$

پس بہ جہ + جہ عہ + عہ بہ = ۳ جہ عہ ، وغیرہ

جواب : ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$

۱۱ — مساوات

$۸۱ لا^{۳} - ۱۸ لا^{۲} - ۳۶ لا + ۸ = ۰$

کو جسکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو ۔

جواب :- $\frac{۲}{۹}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $-\frac{۲}{۳}$

۱۲ — اگر مساوات

$لا^{۳} - ف لا^{۲} + ق لا - ر = ۰$

کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اوسط اصل $\frac{۳ ر}{ق}$ ہے ۔

۱۳ — مساوات

$لا^{۴} - ۲ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} + ۶ لا - ۲۱ = ۰$

کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں ۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو ۔

عہ + بہ = ۰ لو اور دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی اور تیسری مساوات استعمال کرو ۔

جواب: $\sqrt{۳}$ ، $-\sqrt{۳}$ ، $۱ \pm \sqrt{-۶}$

۱۴ — مساوات

$$۳\,لا^{۴} - ۲۵\,لا^{۳} + ۵۰\,لا^{۲} - ۵۰\,لا + ۱۲ = ۰$$

کی دو اصلوں کا حاصل ضرب ۲ ہے۔ سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب: ۲ ، $\frac{۱}{۳}$ ، $۱ \pm \sqrt{-۱}$

۱۵ — کعبی مساوات

$$لا^{۳} - ف\,لا^{۲} + ق\,لا - ر = ۰$$

کی ایک اصل دوسری کا دو چند ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی اصل کو ایک مساوات درجہ دوم سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(41) ۱۶ — ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱}\,لا^{ن-۱} + ب_{۲}\,لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۱}\,لا + ب_{ن} = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم ہوسکتی ہیں اگر وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ ، عہ + ضہ ، عہ + ۲ ضہ ، ... ، عہ + (ن − ۱) ضہ ہیں تو مساواتوں (۲) میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا

$$- ب_{۱} = ن\,عہ + \{۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (ن-۱)\}\,ضہ$$

$$= ن\,عہ + \frac{ن(ن-۱)}{۲}\,ضہ \quad \cdots\cdots (۱)$$

پھر چونکہ مقداروں کی کسی تعداد کے مربعوں کا مجموعہ = ان مقداروں کے مجموعہ کا مربع منفی ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کا دو چند، اسلئے

$$ب_{۱}^{۲} - ۲\,ب_{۲} = عہ^{۲} + (عہ + ضہ)^{۲} + (عہ + ۲\,ضہ)^{۲} + \cdots\cdots$$

$$= ن\,عہ^{۲} + ن(ن-۱)\,عہ\,ضہ + \frac{ن(ن-۱)(۲ن-۱)}{۶}\,ضہ^{۲} \quad \cdots\cdots (۲)$$

(۱) کے مُربع کو (۲) کے ن گنے میں سے تفریق کرو تو $ضہ^{۲}$ ، $ب_{۱}$ اور $ب_{۲}$ کی قوم میں

ملجائیگا۔ پھر ہم مساوات (۱) سے ع معلوم کرسکتے ہیں۔ اسی طرح تمام اصلوں کو سروں ب$_1$ اور ب$_2$ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۷ — وہ شرط معلوم کرو جو مساوات

لا^3 − ف لا^2 + ق لا − ر = ۰

کے سروں سے پوری ہونی چاہیئے اگر اس کی دو اصلوں عہ، بہ میں ربط عہ + بہ = ۰ موجود ہو۔

جواب:- ف ق − ر = ۰

۱۸ — وہ شرط معلوم کرو کہ کعبی مساوات

لا^3 − ف لا^2 + ق لا − ر = ۰

کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

جواب:- ف^3 ر − ق^3 = ۰

۱۹ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔
(دیکھو مثال ۱۲) جواب:- ۲۷ ر^2 − ۹ ف ق ر + ۲ ق^3 = ۰

۲۰ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

لا^4 + ف لا^3 + ق لا^2 + ر لا + س = ۰

کی دو اصلوں میں ربط عہ + بہ = ۰ موجود ہو اور اس صورت میں درجہ دوم کی دو مساواتیں معلوم کرو جنکی اصلیں (۱) عہ، بہ اور (۲) جہ، ضہ ہوں۔

جواب:- ف ق ر − ق^2 س − ر^2 = ۰،

(۱) ف لا^2 + ر = ۰،

(۲) لا^2 + ف لا + $\frac{\text{ف س}}{\text{ر}}$ = ۰

۲۱ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلوں میں ربط بہ + جہ = عہ + ضہ موجود ہو۔

جواب:- ف^3 − ۴ ف ق + ۸ ر = ۰

۲۲ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

لا^4 + ف لا^3 + ق لا^2 + ر لا + س = ۰

کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں ربط عہ بہ = جہ ضہ موجود ہو۔

جواب :- ف۲ س - ر۲ = ۰

۲۴ ــــ ثابت کرو کہ سوال ۲۲ میں حاصل شدہ شرط اسوقت بھی پوری ہوتی ہے جبکہ درجہ چہارم کی مساوات کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

۲۵ ــــ مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں میں کوئی ربط موجود ہو۔

(42)

ہم نے دفعہ ماسبق کی مثالوں میں یہ دیکھا ہے کہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص روابط موجود ہوں تو ان کو متعین کرنے میں سروں اور اصلوں کو ملانیوالی مساواتوں کا کیا فائدہ ہے۔ اب ہم عام صورت میں یہ ثابت کرینگے کہ

اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں میں سے دو کے درمیان بہ = فہ (عہ) کی شکل کا ربط موجود ہو تو مساوات کا درجہ بقدر ۲ کے گھٹایا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات متماثلہ

$$ف (لا) \equiv ا_۰ لا^{ن} + ا_۱ لا^{ن-۱} + ا_۲ لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_{ن}$$

میں لا کی بجائے فہ (لا) مندرج کیا گیا ہے تو

$$ف \{فہ (لا)\} \equiv ا_۰ \{فہ (لا)\}^{ن} + ا_۱ \{فہ (لا)\}^{ن-۱} + \cdots\cdots + ا_{ن}$$

اس مساوات متماثلہ کے دوسرے رکن کو ہم سہولت کی خاطر فا (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب لا کی بجائے عہ مندرج کرنے سے

$$فا (عہ) \equiv ف \{فہ (عہ)\} \equiv ف (بہ) = ۰$$

پس مساوات فا (لا) = ۰ کو عہ پورا کرتا ہے اور یہ ف (لا) = ۰ کو بھی

پورا کرتا ہے۔ اس لئے کثیر الارقام ف (لا) اور فا (لا) کا جزو مشترک لا۔عہ ہے
اس طرح عہ معلوم ہو سکتا ہے اور اس سے فہ (عہ) یا بہ معلوم ہو جاتا ہے
اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے درجہ کو بقدر ۲ کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

مثالیں

۱ — مساوات

$$لا^۳ - ۵ لا^۲ - ۴ لا + ۲۰ = ۰$$

کی دو اصلوں میں فرق = ۳۔ انہیں معلوم کرو۔

یہاں بہ - عہ = ۳، بہ = ۳ + عہ۔ دئے ہوئے کثیر الارقام ف (لا) میں
لا کی بجائے لا + ۳ مندرج کرو تو یہ کثیر الارقام $لا^۳ + ۴ لا^۲ -$ ۷ لا - ۱۰ ہو جائیگا۔ اس کا
اور ف (لا) کا جزو مشترک لا - ۲ ہے جس سے عہ = ۲، بہ = ۵ حاصل ہوگا۔
تیسری اصل -۲ ہے۔

۲ — مساوات

$$لا^۴ - ۵ لا^۳ + ۱۱ لا^۲ - ۱۳ لا + ۶ = ۰$$

کی دو اصلوں میں ربط ۲ بہ + ۳ عہ = ۷ موجود ہے۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- ۱، ۲، ۱ ± $\sqrt{-۲}$

یہاں یہ بات واضح رہے کہ جب دو کثیر الارقام ف (لا) اور فا (لا) میں
مشترک اجزائے ضربی ہوں تو یہ اجزائے ضربی مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے کے
معمولی طریقہ سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ دو دی ہوئی
مساواتوں میں مشترک اصلیں موجود ہیں تو دے ہوئے کثیر الارقاموں کے مقسوم علیہ اعظم
کو صفر کے مساوی رکھنے سے ہم ان اصلوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

مثالیں

۱ — مساواتوں

$$۲\,\text{لا}^{۳} + ۵\,\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} - ۹ = ۰$$

$$۳\,\text{لا}^{۳} + ۷\,\text{لا}^{۲} - ۱۱\,\text{لا} - ۱۵ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں ۔ اِنکو معلوم کرو ۔

جواب :- −۱ ، −۳

۲ — مساواتوں

$$\text{لا}^{۳} + \text{ف}\,\text{لا}^{۲} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = ۰$$

$$\text{لا}^{۳} + \text{فَ}\,\text{لا}^{۲} + \text{قَ}\,\text{لا} + \text{رَ} = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں ۔ وہ دو درجی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں یہ اصلیں ہوں ۔ ہر مساوات کی تیسری اصل بھی دریافت کرو ۔

جواب :- $\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ق} - \text{قَ}}{\text{ف} - \text{فَ}}\,\text{لا} + \frac{\text{ر} - \text{رَ}}{\text{ف} - \text{فَ}} = ۰$ ، $\frac{-\text{ر}(\text{ف} - \text{فَ})}{\text{ر} - \text{رَ}}$ ،

$\frac{-\text{رَ}(\text{ف} - \text{فَ})}{\text{ر} - \text{رَ}}$

۲۶ — اکائی کے جذر الکعب ۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰ \text{ ، } \text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = ۰$$

کی شکل کی مساواتوں کو جنمیں صرف بڑی سے بڑی قوت والی رقم اور مطلق رقم شامل ہوں ہم ثنائی مساواتیں کہینگے ۔ قبل الذکر مساوات کی اصلوں کو ہم اکائی کے ن ویں جذر کہینگے ۔ اگلے باب میں اِن شکلوں پر بحث کیجائیگی ۔ فی الحال ہم ثنائی کعبی مساوات کی سادہ صورت پر اکتفا کرتے ہیں جس کے لئے اصلوں کی بعض سودمند خواص بہ آسانی ثابت کئے جا سکتے ہیں ۔ دفعہ ۱۶ مثال ۵ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ کعبی مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۱ = ۰$$

کی اصلیں حسب ذیل ہیں

$$۱،\quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}،\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

ان خیالی اصلوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم سہ سے تعبیر کریں تو دوسری خیالی اصل سہ^2 ہو جائیگی - مربع لینے سے یہ بات ظاہر ہے یا اس کو ہم اسطرح بھی ثابت کر سکتے ہیں :-

اگر کعبی کی ایک اصل سہ ہو تو سہ^2 بھی ایک اصل ہونی چاہئے کیونکہ سہ^3 = ۱ اس لئے مربع لینے سے سہ^6 = ۱ یعنے (سہ^2)^3 = ۱، اس طرح سہ^2 بھی کعبی مساوات لا^3 − ۱ = ۰ کو پورا کرتا ہے اور اسلئے اسکی ایک اصل سہ^2 بھی ہے - اب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

(44)

لا^3 − ۱ ≡ (لا − ۱) (لا − سہ) (لا − سہ^2)

لا کو − لا میں تبدیل کرنے سے مساوات متماثلہ

لا^3 + ۱ ≡ (لا + ۱) (لا + سہ) (لا + سہ^2)

حاصل ہوگی جس سے

لا^3 + ۱ = ۰

کی اصلیں معلوم ہونگی -

جہاں کہیں مقداروں کے کسی حاصل ضرب میں اکائی کے جذر الکعب داخل ہوں اور انکی قوتیں ۲ سے زیادہ پیش ہوں تو ہم انکی بجائے سہ، یا سہ^2، یا ایک رکھ سکتے ہیں مثلاً

سہ^4 = سہ^3 × سہ = سہ، سہ^5 = سہ^3 × سہ^2 = سہ^2،

سہ^6 = سہ^3 × سہ^3 = ۱، وغیرہ

دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی یا دوسری مساوات سے اکائی کے جذر الکعبوں کی حسب ذیل خاصیت ملتی ہے

۱ + سہ + سہ^2 = ۰

اس مساوات کی مدد سے کسی جملہ کو جس میں حقیقی مقداریں اور خیالی جذر الکعب داخل ہوں ہم ف + سہ ق، ف + سہ^2 ق، سہ ف + سہ^2 ق میں سے کسی ایک شکل میں لکھہ سکتے ہیں -

مثالیں

۱ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(\text{سہ م} + \text{سہ}^{2}\,\text{ن})(\text{سہ}^{2}\,\text{م} + \text{سہ ن})$$

منطق ہے۔

جواب :- $\text{م}^{2} - \text{م ن} + \text{ن}^{2}$

۲ — حسب ذیل متماثلہ مساواتوں کو ثابت کرو۔

$$\text{م}^{3} + \text{ن}^{3} = (\text{م} + \text{ن})(\text{سہ م} + \text{سہ}^{2}\,\text{ن})(\text{سہ}^{2}\,\text{م} + \text{سہ ن})$$

$$\text{م}^{3} - \text{ن}^{3} = (\text{م} - \text{ن})(\text{سہ م} - \text{سہ}^{2}\,\text{ن})(\text{سہ}^{2}\,\text{م} - \text{سہ ن})$$

۳ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{جہ})(\text{عہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{بہ} + \text{سہ جہ})$$

منطق ہے۔

جواب :- $\text{عہ}^{2} + \text{بہ}^{2} + \text{جہ}^{2} - \text{بہ جہ} - \text{جہ عہ} - \text{عہ بہ}$

۴ — متماثلہ مساوات

$$(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ})(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{جہ})(\text{عہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{بہ} + \text{سہ جہ}) \equiv \text{عہ}^{3} + \text{بہ}^{3} + \text{جہ}^{3} - ۳\,\text{عہ بہ جہ}$$

کو ثابت کرو۔

۵ — متماثلہ مساوات

$$(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{جہ})^{3} + (\text{عہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{بہ} + \text{سہ جہ})^{3} \equiv (۲\,\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ})(۲\,\text{بہ} - \text{جہ} - \text{عہ})(۲\,\text{جہ} - \text{عہ} - \text{بہ})$$

کو ثابت کرو۔ سوال (۲) استعمال کرو۔

۶ — متماثلہ مساوات

$$(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{جہ})^{3} - (\text{عہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{بہ} + \text{سہ جہ})^{3} \equiv -۳\sqrt{-۳}\,(\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})$$

کو ثابت کرو۔ سوال (۲) استعمال کرو اور سہ − سہ² کی بجائے اسکی قیمت

(45)

$\sqrt[3]{1}$ درج کرو۔

۷ — متماثلہ مساوات

$(عہ^۳ + بہ^۳ + جہ^۳ - ۳ عہ بہ جہ)^۲ \equiv عہَ^۳ + بہَ^۳ + جہَ^۳ - ۳ عہَ بہَ جہَ$

کو ثابت کرو جہاں

$عہَ = عہ^۲ + ۲ بہ جہ$، $بہَ = بہ^۲ + ۲ جہ عہ$، $جہَ = جہ^۲ + ۲ عہ بہ$

۸ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$م + ن$، $سہ م + سہ^۲ ن$، $سہ^۲ م + سہ ن$

ہیں۔ جواب :۔ $لا^۳ - ۳ م ن لا - (م^۳ + ن^۳) = ۰$

۹ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$ل + م + ن$، $ل + سہ م + سہ^۲ ن$، $ل + سہ^۲ م + سہ ن$

ہیں۔

جواب :۔ $لا^۳ - ۳ ل لا^۲ + (ل^۲ - م ن) لا - (ل^۳ + م^۳ + ن^۳ - ۳ ل م ن) = ۰$

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ اکائی کے ن، ن ویں جذروں کے جواب میں کسی تعداد کے ن، ن ویں جذر ہوتے ہیں۔ مساوات

$لا^ن - ۱ = ۰$

کی اصلیں ۱ کے ن، ن ویں جذر ہیں۔

مثلاً ۱ کے تین جذر الکعب ہیں

$\sqrt[3]{1}$، $سہ \sqrt[3]{1}$، $سہ^۲ \sqrt[3]{1}$

جہاں $\sqrt[3]{1}$ سے معمولی حسابی عمل کے بموجب ۱ کا حقیقی جذر الکعب تعبیر ہوتا ہے۔ ان میں سے ہر جذر مساوات $لا^۳ - ۱ = ۰$ کو پورا کرتا ہے۔ یہ واضح رہے کہ مندرجہ بالا تین جذر الکعب حاصل ہو جاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک کو ۱، سہ، سہ^۲ سے ضرب دیا جائے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی جذر الکعب کے علاوہ دو خیالی جذر الکعب بھی ہوتے ہیں جو حقیقی جذر الکعب کو اکائی کے خیالی جذر الکعبوں سے ضرب

دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً معمولی جذرالکعب ۳ کے علاوہ عدد ۲۷ کے دو خیالی جذرالکعب

$$-\frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}\sqrt{-۳} \ ، \ -\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}\sqrt{-۳}$$

ہیں۔ انکا مکعب لینے سے اس بیان کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

۱۰۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی ایک اصل

$$س\sqrt[۳]{ق+\sqrt{ق^{۲}+ف^{۳}}} + س^{۲}\sqrt[۳]{ق-\sqrt{ق^{۲}+ف^{۳}}}$$

ہو جہاں $س^{۳} = ۱$۔ سوال ۸ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

جواب:- $لا^{۳} + ۳ف\,لا - ۲ق = ۰$

(46) ۱۱۔ منطق سروں کے ساتھ مساوات بناؤ جسکی ایک اصل

$$ط_{۱}\sqrt[۳]{ف} + ط_{۲}\sqrt[۳]{ق}$$

ہو جہاں $ط_{۱}^{۳} = ۱$، $ط_{۲}^{۳} = ۱$۔

مساوات

$$لا = ط_{۱}\sqrt[۳]{ف} + ط_{۲}\sqrt[۳]{ق}$$

کی طرفین کا مکعب لینے سے اور لا کی بجائے اسکی بائیں طرف کی قیمت درج کرنیسے مساوات ملیگی

$$لا^{۳} - ف - ق = ۳ط_{۱}ط_{۲}\sqrt[۳]{ف\,ق}\;لا$$

پھر طرفین کا مکعب لینے سے حاصل ہوگا

$$(لا^{۳} - ف - ق)^{۳} = ۲۷ف\,ق\,لا^{۳}$$

اب چونکہ $ط_{۱}$ اور $ط_{۲}$ میں سے ہر ایک کی قیمت ۱ یا س یا $س^{۲}$ ہو سکتی ہے اسلئے اس مساوات کی نو اصلیں ہیں

$$\sqrt[۳]{ف}+\sqrt[۳]{ق} \ ، \ س\sqrt[۳]{ف} + س\sqrt[۳]{ق} \ ، \ س^{۲}\sqrt[۳]{ف} + س^{۲}\sqrt[۳]{ق}$$

سہ $\sqrt[3]{\text{ف}}$ + سہ² $\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، سہ² $\sqrt[3]{\text{ف}}$ + $\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، سہ $\sqrt[3]{\text{ف}}$ + $\sqrt[3]{\text{ق}}$

سہ² $\sqrt[3]{\text{ف}}$ + سہ $\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، $\sqrt[3]{\text{ف}}$ + سہ² $\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، $\sqrt[3]{\text{ف}}$ + سہ $\sqrt[3]{\text{ق}}$

ہم یہاں یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آخری مساوات میں طہ اور طہ داخل نہیں ہوتے اسلئے ابتداً اِن اصلوں میں سے کسی ایک کو لا کے مساوی قرار دیا جاسکتا ہے اور مساوات مرتب کیجا سکتی ہے۔ آخری مساوات اس طرح بھی حاصل ہوسکتی تھی کہ ہم لا ـ $\sqrt[3]{\text{ف}}$ ـ $\sqrt[3]{\text{ق}}$ کی شکل کے نو اجزائے ضربی کو باہم ضرب دیتے جہاں یہ نو اجزائے ضربی مندرجۂ بالا نو اصلوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲ــــ تین کعبی مساواتیں علٰحدہ علٰحدہ بناؤ جنکی اصلیں مثال ماسبق کی مساوات کی اصلوں میں سے تین تین (انتصابی ستونوں میں لکھی ہوئیں) کے جٹ ہوں۔

ہم اِن مساواتوں کو مثال ۸ کی مدد سے لکھ سکتے ہیں اس طور پر کہ پہلے م اور ن کو $\sqrt[3]{\text{ف}}$ ، $\sqrt[3]{\text{ق}}$ کے مساوی، پھر سہ $\sqrt[3]{\text{ف}}$ ، سہ $\sqrt[3]{\text{ق}}$ کے مساوی اور آخر میں سہ² $\sqrt[3]{\text{ف}}$ ، سہ² $\sqrt[3]{\text{ق}}$ کے مساوی لیتے ہیں۔

جواب:ــ لا³ ـ ۳ $\sqrt[3]{\text{ف ق}}$ لا ـ ف ـ ق = ۰

لا³ ـ ۳ سہ² $\sqrt[3]{\text{ف ق}}$ لا ـ ف ـ ق = ۰

لا³ ـ ۳ سہ $\sqrt[3]{\text{ف ق}}$ لا ـ ت ـ ق = ۰

۲۷ــ اصلوں کے متشاکل تفاعل

ــ کسی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل وہ تفاعل ہیں جنمیں اصلیں ایک ہی وضع پر داخل ہوتی ہیں اس طور پر کہ تفاعل قیمت میں غیر متغیر رہتا ہے جب کسی دو اصلوں کو آپس میں تبدیل کردیا جاتا ہے۔ مثلاً اصلوں کے وہ تفاعل (اصلوں کا مجموعہ

اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ، وغیرہ) جو دفعہ ۲۳ میں بیان ہوئے ہیں اس نوعیت کے تفاعل ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی جملہ میں مثال کے طور پر عہ کی بجائے عہ۲ اور عہ۲ کی بجائے عہ لکھا جائے تو جملہ کی قیمت غیر متغیر رہتی ہے۔ (47)

دفعہ ۲۳ کے تفاعل اصلوں کے سادہ ترین متشاکل تفاعل ہیں کیونکہ ان میں ہر اصل صرف اپنی پہلی قوت میں داخل ہوتی ہے۔

ہم اصلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) کی مدد سے اصلوں کے مختلف متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔ آیندہ کسی باب میں جسمیں اس مضموں پر بحث کیجائیگی ہم ثابت کرینگے کہ اصلوں کے کسی منطق متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ یہاں جو مثالیں دیجائینگی ان میں سے اکثر کعبی اور چارد رجی کی سادہ صورتوں سے متعلق ہونگی اور یہ مثالیں فی الحال اس قسم کے جملوں کو سروں کی رقوم میں معمولی ابتدائی طریقوں سے حاصل کرنے کے لئے کافی ہیں۔

عام طور پر کسی متشاکل تفاعل کو اسکی کسی رقم کے پیچھے علامت Σ لگاکر تعبیر کیا جاتا ہے اور اسکی مدد سے پورا تفاعل لکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر کعبی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو Σ عہ۲ بہ۲ سے متشاکل تفاعل

عہ۲ بہ۲ + بہ۲ جہ۲ + جہ۲ عہ۲

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصلوں کے جتنے حاصل ضرب مل سکتے ہیں اونکو لیا گیا ہے اور ہر ایک کا جداگانہ مربع لیکر جمع کیا گیا ہے۔ اسی طرح Σ عہ۲ بہ سے مجموعہ

عہ۲ بہ + عہ۲ جہ + بہ۲ جہ + بہ۲ عہ + جہ۲ عہ + جہ۲ بہ

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصلوں کی جتنی ترتیبیں ہو سکتی ہیں لی گئی ہیں اور ہر رقم کی پہلی اصل کا مربع لیا گیا ہے۔

حسب ذیل مثالوں میں مختلف متشاکل تفاعل واقع ہونگے۔ انکی مدد سے طالب علم کو اس قسم کے جملے لکھنے کی مشق ہو جائیگی جب

(48)

نمونہ کی ایک رقم دی گئی ہو —

مثالیں

۱ — کعبی مساوات

لا^3 + ف لا^2 + ق لا + ر = ۰

کی اصلوں کے جملہ Σ عہ^2 بہ کی قیمت معلوم کرو —

مساواتوں

عہ + بہ + جہ = − ف

بہ جہ + جہ عہ + عہ جہ = ق

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

Σ عہ^2 بہ + ۳ عہ بہ جہ = − ف ق

پس Σ عہ^2 بہ = ۳ ر − ف ق

۲ — اسی کعبی مساوات کی صورت میں

عہ^2 + بہ^2 + جہ^2

کی قیمت معلوم کرو — **جواب**:- Σ عہ^2 = ف^2 − ۲ ق

۳ — اسی کعبی مساوات کی صورت میں

عہ^3 + بہ^3 + جہ^3

کی قیمت معلوم کرو۔

Σ عہ اور Σ عہ^2 کی قیمتوں کو ضرب دینے سے حاصل ہوگا

عہ^3 + بہ^3 + جہ^3 + Σ عہ^2 بہ = − ف^3 + ۲ ف ق

پس مثال ۱ سے

Σ عہ^3 = − ف^3 + ۳ ف ق − ۳ ر

۴ — اسی کعبی مساوات کی صورت میں

بہ^2 جہ^2 + جہ^2 عہ^2 + عہ^2 بہ^2

کی قیمت معلوم کرو —

ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$به^2 جه^2 + جه^2 عه^2 + عه^2 به^2 + ۲ عه به جه (عه + به + جه) = ق^2$$

جس سے $\sum عه^2 به^2 = ق^2 - ۲ ف ر$

۵ — اسی کعبی مساوات کی صورت میں

$$(به + جه)(جه + عه)(عه + به)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

یہ جملہ $۲ عه به جه + \sum عه^2 به$ کے مساوی ہے۔ **جواب:**۔ ر۔ف

۶ — چار درجی مساوات

$$لا^4 + ف لا^3 + ق لا^2 + ر لا + س = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

$$عه^2 به جه + عه^2 به ضه + عه^2 جه ضه + به^2 عه جه + به^2 عه ضه + به^2 ضه جه$$
$$+ جه^2 عه به + جه^2 عه ضه + جه^2 به ضه + ضه^2 عه به + ضه^2 عه جه + ضه^2 جه به$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$عه + به + جه + ضه = - ف$$
$$عه به جه + عه به ضه + عه جه ضه + به جه ضه = - ر$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$\sum عه^2 به جه + ۴ عه به جه ضه = ف ر$$

پس $\sum عه^2 به جه = ف ر - ۴ س$

(۴۹) ۷ — اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$$عه^2 + به^2 + جه^2 + ضه^2$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$\sum عه$ کا مربع لینے سے ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$\sum عه^2 = ف^2 - ۲ ق$$

۸ — اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$$عه^2 به^2 + عه^2 جه^2 + عه^2 ضه^2 + به^2 جه^2 + به^2 ضه^2 + جه^2 ضه^2$$

کی قیمت معلوم کرو۔

مساوات

$\sum$ عہ بہ = ق

کا مربع لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$\sum$ عہ^2 بہ^2 + ۲ $\sum$ عہ^2 بہ جہ + ۶ عہ بہ جہ ضہ = ق^2

پس مثال ۶ سے

$\sum$ عہ^2 بہ^2 = ق^2 – ۲ ف ر + ۲ س

۹۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں $\sum$ عہ^3 بہ کی قیمت معلوم کرو۔

اس متشاکل تفاعل کو بنانے کے لئے ہم حروف عہ، بہ کی دو ترتیبیں عہ بہ اور بہ عہ لیتے ہیں۔ ان سے $\sum$ کی دو رقمیں عہ^3 بہ اور بہ^3 عہ حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح حروف عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے ہر زوج سے دو دو رقمیں حاصل ہونگی۔ اس طرح متشاکل تفاعل میں کل بارہ رقمیں ہونگی۔

مساواتوں

$\sum$ عہ بہ = ق، $\sum$ عہ^2 = ف^2 – ۲ ق

کو باہم ضرب دو اور دیکھو کہ

$\sum$ عہ^2 $\sum$ عہ بہ $\equiv$ $\sum$ عہ^3 بہ + $\sum$ عہ^2 بہ جہ

[اس آخری مساوات سے جس قسم کے نتیجے تعبیر ہوتے ہیں انکی تصدیق اس طرح ہوسکتی ہے کہ مساوات کی طرفین میں رقموں کی تعداد وہی ہونی چاہئیے۔ مثلاً موجودہ مثال میں چونکہ $\sum$ عہ^2 میں چار رقمیں اور $\sum$ عہ بہ میں چھ رقمیں ہیں انکے حاصل ضرب میں ۲۴ رقمیں ہونی چاہئیں اور یہ درحقیقت $\sum$ عہ^3 بہ کی بارہ رقمیں اور $\sum$ عہ^2 بہ جہ کی بارہ رقمیں ہیں۔]

اس لئے امثلہ ماسبق کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$\sum$ عہ^3 بہ = ف^2 ق – ۲ ق^2 – ف ر + ۴ س

۱۰۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں

عہ^4 + بہ^4 + جہ^4 + ضہ^4

کی قیمت معلوم کرو۔

$\sum \text{عہ}^2$ کا مربع لینے اور حاصل شدہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\sum \text{عہ}^4 = \text{ف}^4 + 2\,\text{ق}^2 - 4\,\text{ف}^2\text{ق} + 4\,\text{ف}\,\text{ر} - 4\,\text{س}$$

۱۱ — مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

$\sum \text{عہ}_1$ کا مربع لینے سے ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$\text{ب}_1^2 = \sum \text{عہ}_1^2 + 2\sum \text{عہ}_1\text{عہ}_2$$

پس

$$\sum \text{عہ}_1^2 = \text{ب}_1^2 - 2\,\text{ب}_2$$

۱۲ — مثال ماسبق کی مساوات کی اصلوں کے متکافیوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

(50)

دفعہ ۲۳ کی آخری دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{عہ}_2\text{عہ}_3\cdots\cdots\text{عہ}_{\text{ن}} + \text{عہ}_1\text{عہ}_3\cdots\cdots\text{عہ}_{\text{ن}} + \cdots\cdots + \text{عہ}_1\text{عہ}_2\cdots\cdots\text{عہ}_{\text{ن}-1} = (-1)^{\text{ن}-1}\,\text{ب}_{\text{ن}-1}$$

اور

$$\text{عہ}_1\text{عہ}_2\cdots\cdots\text{عہ}_{\text{ن}} = (-1)^{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}$$

پہلی مساوات کو دوسری سے تقسیم کریں تو

$$\frac{1}{\text{عہ}_1} + \frac{1}{\text{عہ}_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\text{عہ}_{\text{ن}}} = \frac{-\text{ب}_{\text{ن}-1}}{\text{ب}_{\text{ن}}}$$

یعنی

$$\sum \frac{1}{\text{عہ}_1} = -\frac{\text{ب}_{\text{ن}-1}}{\text{ب}_{\text{ن}}}$$

اسی طرح اصلوں کے متکافیوں میں سے دو دو کے، تین تین کے، وغیرہ حاصل ضربوں کا مجموعہ آخر سے تیسرے یا آخر سے چوتھے وغیرہ سر کو آخری سر سے

تقسیم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے ۔

۱۳ ــــ کعبی مساوات

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$

کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو ۔

$$(\text{بہ} - \text{جہ})^2 + (\text{جہ} - \text{عہ})^2 + (\text{عہ} - \text{بہ})^2$$

نوٹ: ــ عام طور پر مساوات کے سروں کو ثنائی سروں کی صورت میں لکھنا مفید ہوگا جیسا کہ مثال بالا میں کیا گیا ہے یعنی حرفی سروں ا_0، ا_1، ا_2 وغیرہ کے علاوہ عددی سر وہی ہوں جو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یہاں چونکہ مساوات تیسرے درجہ کی ہے اسلئے یکے بعد دیگرے آنیوالے عددی سر وہ ہیں جو تیسری قوت کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یعنی ۱، ۳، ۳، ۱ ــ
ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$\text{ا}_0^2\{(\text{بہ} - \text{جہ})^2 + (\text{جہ} - \text{عہ})^2 + (\text{عہ} - \text{بہ})^2\} = 18(\text{ا}_1^2 - \text{ا}_0\,\text{ا}_2)$$

۱۴ ــــ مساوات درجہ دوم

$$(\text{لا} - \text{عہ})^2(\text{بہ} - \text{جہ})^2 + (\text{لا} - \text{بہ})^2(\text{جہ} - \text{عہ})^2 + (\text{لا} - \text{جہ})^2(\text{عہ} - \text{بہ})^2 = 0$$

کے متواتر سروں کو مثال ماسبق کی کعبی مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کرو جہاں کعبی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں ــ

یہاں مثال ماسبق کے متشاکل تفاعل کے علاوہ حسب ذیل دو متشاکل تفاعل کی قیمتیں معلوم کرنی ہونگی :ــ

$$\text{عہ}(\text{بہ} - \text{جہ})^2 + \text{بہ}(\text{جہ} - \text{عہ})^2 + \text{جہ}(\text{عہ} - \text{بہ})^2 ،$$

$$\text{عہ}^2(\text{بہ} - \text{جہ})^2 + \text{بہ}^2(\text{جہ} - \text{عہ})^2 + \text{جہ}^2(\text{عہ} - \text{بہ})^2$$

جواب :ــ $(\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2)\,\text{لا}^2 + (\text{ا}_0\text{ا}_3 - \text{ا}_1\text{ا}_2)\,\text{لا} + (\text{ا}_1\text{ا}_3 - \text{ا}_2^2) = 0$

۱۵ ــــ مثال ۱۳ کی کعبی مساوات کی صورت میں

$$(2\,\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ})(2\,\text{بہ} - \text{جہ} - \text{عہ})(2\,\text{جہ} - \text{عہ} - \text{بہ})$$

کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

چونکہ ۲عہ − بہ − جہ = ۳عہ − (عہ + بہ + جہ) = ۳عہ + ۳ ا$_1$/ا$_0$

(51) اسلئے مطلوبہ قیمت متماثلہ مساوات

ا$_0$ لا^3 + ۳ ا$_1$ لا^2 + ۳ ا$_2$ لا + ا$_3$ ≡ ا$_0$ (لا − عہ)(لا − بہ)(لا − جہ)

میں لا کی بجائے − ا$_1$/ا$_0$ درج کرنے سے بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

جواب:- ا$_0^3$(۲عہ − بہ − جہ)(۲بہ − جہ − عہ) ×
(۲جہ − عہ − بہ) = −۲۷(ا$_0^2$ ا$_3$ − ۳ا$_0$ ا$_1$ ا$_2$ + ۲ ا$_1^3$)

۱۶ — چاردرجی مساوات

ا$_0$ لا^4 + ۴ ا$_1$ لا^3 + ۶ ا$_2$ لا^2 + ۴ ا$_3$ لا + ا$_4$ = ۰

کے سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

(بہ − جہ)^2(عہ − ضہ)^2 + (جہ − عہ)^2(بہ − ضہ)^2 + (عہ − بہ)^2(جہ − ضہ)^2

یہاں مساوات بالا میں عددی سر وہ ہیں جو چوتھی قوت کے ثنائی جملہ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں۔ زیر بحث متشاکل تفاعل

۲ Σ عہ^2 بہ^2 − ۲ Σ عہ^2 بہ جہ + ۱۲ عہ بہ جہ ضہ

کے متماثل ہے۔ مثالوں ۶ اور ۸ کے نتیجوں کو استعمال کیا جائے تو

ا$_0^2${(بہ − جہ)^2(عہ − ضہ)^2 + (جہ − عہ)^2(بہ − ضہ)^2 + (عہ − بہ)^2(جہ − ضہ)^2}
= ۲۴(ا$_0$ ا$_4$ − ۴ ا$_1$ ا$_3$ + ۳ ا$_2^2$)

۱۷ — مثال ۱۶ کی مساوات کی چار اصلوں میں سے دو دو کے چھ حاصل ضرب لئے جائیں اور حاصل ضرب میں (مثلاً عہ بہ میں) بقیہ دو اصلوں کا حاصل ضرب (یعنی جہ ضہ) جمع کیا جائے تو ہمیں تین مجموعے ملینگے

بہ جہ + عہ ضہ، جہ عہ + بہ ضہ، عہ بہ + جہ ضہ

اب سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل دو متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے:-

(جہ عہ + بہ ضہ)(عہ بہ + جہ ضہ) + (عہ بہ + جہ ضہ)(بہ جہ + عہ ضہ)

+ (بہ جہ + عہ ضہ)(جہ عہ + بہ ضہ)،

(بہ جہ + عہ ضہ)(جہ عہ + بہ ضہ)(عہ بہ + جہ ضہ)

ان میں سے پہلا متذکرۂ بالا مجموعوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اور دوسرا تینوں کا مسلسل حاصل ضرب۔ اب چونکہ یہ تینوں تفاعل (متذکرۂ بالا تین مجموعے) چار درجی مساوات کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں اسلئے ہم ان کو اختصاراً حروف لہ، مہ، نہ سے تعبیر کرینگے۔ اِس لئے ہمیں مہ نہ + نہ لہ + لہ مہ اور لہ مہ نہ کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہونگی۔

قبل الذکر متشاکل تفاعل $\sum$ عہ² بہ جہ ہے جس کو بہ آسانی حسب ذیل طریقہ سے بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$\text{ا}_0^2 \sum \text{مہ نہ} = 4(4\,\text{ا}_1\text{ا}_3 - \text{ا}_0\text{ا}_4)$$

موخرالذکر متشاکل تفاعل ضرب دینے کے بعد

$$\text{عہ بہ جہ ضہ}(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 + \text{ضہ}^2) + \text{عہ}^2\text{بہ}^2\text{جہ}^2\text{ضہ}^2\left(\frac{1}{\text{عہ}^2} + \frac{1}{\text{بہ}^2} + \frac{1}{\text{جہ}^2} + \frac{1}{\text{ضہ}^2}\right)$$

کے مساوی ہے اور ہم معمولی عمل حساب کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں

$$\text{ا}_0^3\,\text{لہ مہ نہ} = 8(2\,\text{ا}_0\text{ا}_3^2 - 3\,\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_4 + 2\,\text{ا}_1^2\text{ا}_4)$$

(52) **۱۸** — مثال ۱۶ کی چار درجی مساوات کے سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

{(جہ − عہ)(بہ − ضہ) − (عہ − بہ)(جہ − ضہ)}{(عہ − بہ)(جہ − ضہ) − (بہ − جہ)(عہ − ضہ)}

{(بہ − جہ)(عہ − ضہ) − (جہ − عہ)(بہ − ضہ)}

یہ تفاعل بھی چار درجی مساوات کے نظریہ میں کافی اہمیت رکھتا ہے۔ اس غرض سے کہ اسکے لکھ لینے میں کوئی ابہام پیدا نہ ہو ہم اُس ترقیم کی تشریح کرینگے جو اس کتاب میں ہمیشہ استعمال ہوگی۔ یہ ترقیم اُسوقت بھی اُسی طرح کارآمد ہوگی جب دوسرے ایسے تفاعل دئے جائیں جو چار درجی مساوات کی اصلوں کے فرقوں پر مشتمل ہوں۔ اصلوں عہ، بہ، جہ کو دائری ترتیب میں رکھنے سے ہمیں تین فرق

به - جه، جه - عه، عه - به، ملتے ہیں اور ہر اصل میں سے ضه کو تفریق کرنے سے تین دوسرے فرق عه - ضه، به - ضه، جه - ضه ملتے ہیں۔ ان میں سے ہم دو دو فرق لیکر انہیں اس طرح مرتب کرتے ہیں:-

(به - جه)(عه - ضه)، (جه - عه)(به - ضه)، (عه - به)(جه - ضه)

زیر بحث تفاعل ان تین جملوں کے فرقوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ ان فرقوں کو حسب معمول دائری ترتیب میں لیا گیا ہو۔

اب مثال ماسبق میں له، مه، نه کی جو قیمتیں دی گئی ہیں انکو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

-مه + نه ≡ (به - جه)(عه - ضه)، -نه + له ≡ (جه - عه)(به - ضه)،

-له + مه ≡ (عه - به)(جه - ضه)

اسلئے ہمیں

(۲له - مه - نه)(۲مه - نه - له)(۲نه - له - مه)

یا (۳له - Σ عه به)(۳مه - Σ عه به)(۳نه - Σ عه به)

کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہوگی۔

اسکو ضرب دیدو اور Σ عه به کی قیمت درج کرو اور مثال ۱۷ کے نتیجوں کو استعمال کرو تو مطلوبہ جملہ حسب ذیل حاصل ہوگا

$ا_۰^۳$ (۲له - مه - نه)(۲مه - نه - له)(۲نه - له - مه)

$= -۴۳۲(ا_۰ا_۲ا_۴ + ۲ا_۱ا_۲ا_۳ - ا_۰ا_۳^۲ - ا_۱^۲ا_۴ - ا_۲^۳)$

سروں کا یہ تفاعل اور امثلہ ۱۳، ۱۵، ۱۶ میں حاصل شدہ تفاعل کعبی اور چار درجی مساواتوں کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں۔

۱۹۔ مثال ۱۶ کے چار درجی کے سروں کی رقوم میں متشاکل تفاعل

$(عه - به)^۲ + (عه - جه)^۲ + (عه - ضه)^۲ + (به - جه)^۲ + (به - ضه)^۲ + (جه - ضه)^۲$

کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو اختصاراً Σ $(عه - به)^۲$ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

جواب:- $ا_۰^۲ \Sigma (عہ - بہ)^۲ = ۴۸ (ا_۱^۲ - ا_۰ ا_۲)$

۲۰ ــــ مثال ۱۶ کے چار درجی کی صورت میں سروں اور اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط ثابت کرو :ـــ

$$ا_۰^۳ (بہ + جہ - عہ - ضہ)(جہ + عہ - بہ - ضہ)(عہ + بہ - جہ - ضہ)$$
$$= ۳۲ (ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳)$$

۲۸ ــــ متشاکل تفاعلوں سے متعلق مسائل

(53) ـ مندرجۂ ذیل دو مسئلے جن پر ہم اس مضمون کی بحث ختم کرتے ہیں بہت سی مثالوں میں اُن نتیجوں کی تصدیق کرنے میں مفید ثابت ہونگے جو متشاکل تفاعلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۱ ۔ اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کی کسی رقم میں سب اصلوں کے قوت نماؤں کا مجموعہ سروں کی رقوم میں تفاعل کی متناظر قیمت کی ہر رقم کے لاحقوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے ۔

ظاہر ہے کہ متشاکل تفاعل کی ہر رقم کے لئے قوت نماؤں کا مجموعہ وہی ہوتا ہے ۔ اِس مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا **"تمام اصلوں کا درجہ"** کہہ سکتے ہیں ۔ اس مسئلہ کی صداقت دفعہ ماسبق کی مثالوں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷ وغیرہ کی مخصوص صورتوں سے ظاہر ہے ۔ عام صورت میں اسکی تصدیق دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) سے ہوسکتی ہے کیونکہ ان مساواتوں میں ہر سر کا لاحقہ اصلوں کے متناظر تفاعل کے "تمام اصلوں کے درجہ" کے مساوی ہے ۔ پس سروں کی کسی قوتوں کے کسی حاصل ضرب میں لاحقوں کا مجموعہ اصلوں کے متناظر تفاعل کے تمام رقموں کے درجہ کے مساوی ہونا چاہیئے ۔

مسئلہ ۲ ۔ جب کسی مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے تو اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کے لئے سروں کی رقوم میں ایسا جملہ ملیگا جس میں تمام رقموں کے عددی اجزائے ضربی کا جبری مجموعہ صفر کے مساوی ہوگا اگر متشاکل تفاعل صرف اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہو ۔

اس مسئلہ کی صداقت عام مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھہ کر تمام

سروں $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$۔ ۔ ۔ $ا_ن$ کو ایک کے مساوی فرض کرنے سے یعنی مساوات

$$ا_۰ لا^ن + ن ا_۱ لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲} ا_۲ لا^{ن-۲} + \dots\dots + ا_ن = ۰$$

میں $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$۔۔۔۔۔ میں سے ہر ایک کو ایک کے مساوی لینے سے ظاہر ہے۔ کیونکہ اس صورت میں یہ مساوات ہو جائیگی $(لا + ۱)^ن = ۰$۔ یعنے تمام اصلیں مساوی ہونگی۔ پس اصلوں کے فرقوں کا کوئی تفاعل صفر کے مساوی ہوگا اور اس لئے سروں کا تفاعل بھی صفر کے مساوی ہوگا کیونکہ یہ تفاعل اصلوں کے تفاعل کے مساوی ہے۔ لیکن یہ تفاعل عددی اجزائے ضربی کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہے جبکہ اس میں تمام سر $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$۔۔۔۔۔ ایک کے مساوی بنائے جائیں۔ اس مسئلہ کی مثالیں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰ (دفعہ ۲۷) ہیں۔

(54)

مثالیں

۱۔ تشاکل تفاعل

$$\frac{به^۲ + جه^۲}{به\ جه} + \frac{جه^۲ + عه^۲}{جه\ عه} + \frac{عه^۲ + به^۲}{عه\ به}$$

کی قیمت ف، ق، ر کی رقوم میں معلوم کرو جہاں عه، به، جه کعبی مساوات

$$لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔ **جواب:**۔ $\frac{ف ق}{ر} - ۳$

۲۔ اُسی مساوات کے لئے

$$(به + جه - عه)^۳ + (جه + عه - به)^۳ + (عه + به - جه)^۳$$

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب:**۔ $۲۴ ر - ف^۳$

۳۔ اُسی مساوات کے لئے $\Sigma\ عه^۳ به^۳$ کی قیمت معلوم کرو۔

یہاں $\Sigma\ عه\ به\ \Sigma\ عه^۲ به^۲ = \Sigma\ عه^۳ به^۳ + عه\ به\ جه\ \Sigma\ عه^۲ به$

جواب:۔ $ق^۳ - ۳ ف ق ر + ۳ ر^۲$

۴ ـــ اسی مساوات کے لئے متشاکل تفاعل

$$(\text{به}^{۳}-\text{جه}^{۳})^{۲}+(\text{جه}^{۳}-\text{عه}^{۳})^{۲}+(\text{عه}^{۳}-\text{به}^{۳})^{۲}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$\sum \text{عه}^{۲}$ کا مربع لینے سے $\sum \text{عه}^{۶}$ بہ آسانی حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۷۲ مثال ۳)

جواب:- $-۲\text{ف}^{۶}-۱۲\text{ف}^{۴}\text{ق}+۱۲\text{ف}^{۳}\text{ر}+۱۸\text{ف}^{۲}\text{ق}^{۲}-۱۸\text{ف ق ر}-۶\text{ق}^{۳}$

۵ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{\text{به}^{۲}+\text{جه}^{۲}}{\text{به}+\text{جه}}+\frac{\text{جه}^{۲}+\text{عه}^{۲}}{\text{جه}+\text{عه}}+\frac{\text{عه}^{۲}+\text{به}^{۲}}{\text{عه}+\text{به}}$$

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب**:- $\dfrac{۲\text{ف}^{۲}\text{ق}-۴\text{ف ر}-۲\text{ق}^{۲}}{\text{ر}-\text{ف ق}}$

۶ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{\text{عه}^{۲}+\text{به جه}}{\text{به}+\text{جه}}+\frac{\text{به}^{۲}+\text{جه عه}}{\text{جه}+\text{عه}}+\frac{\text{جه}^{۲}+\text{عه به}}{\text{عه}+\text{به}}$$

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب**:- $\dfrac{\text{ف}^{۴}-۳\text{ف}^{۲}\text{ق}+۵\text{ف ر}+\text{ق}^{۲}}{\text{ر}-\text{ف ق}}$

۷ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{۲\text{به جه}-\text{عه}^{۲}}{\text{به}+\text{جه}-\text{عه}}+\frac{۲\text{جه عه}-\text{به}^{۲}}{\text{جه}+\text{عه}-\text{به}}+\frac{۲\text{عه به}-\text{جه}^{۲}}{\text{عه}+\text{به}-\text{جه}}$$

کی قیمت معلوم کرو ـــ

جواب: $\dfrac{\text{ف}^{۴}-۲\text{ف}^{۲}\text{ق}+۱۴\text{ف ر}-۸\text{ق}^{۲}}{۴\text{ف ق}-\text{ف}^{۳}-۸\text{ر}}$

۸ ـــ اسی مساوات کے لئے متشاکل تفاعل $\sum\left(\dfrac{\text{عه}-\text{به}}{\text{عه}+\text{به}}\right)^{۲}$ کی قیمت معلوم کرو۔

جواب:- $\dfrac{۳\text{ف}^{۲}\text{ق}^{۲}-۴\text{ف}^{۳}\text{ر}-۴\text{ق}^{۳}-۲\text{ف ق ر}-۹\text{ر}^{۲}}{(\text{ر}-\text{ف ق})^{۲}}$

(55)

۹ — مساوات

$$لا^{4} + ف\,لا^{3} + ق\,لا^{2} + ر\,لا + س = ۰$$

کیلئے $\sum \frac{عہ\,به}{جه^{2}}$ کی قیمت ف، ق، ر، س کی رقوم میں معلوم کرو۔

یہاں $\sum عہ\,به \sum \frac{1}{عہ^{2}} = \sum \frac{عہ}{به} + \sum \frac{عہ\,به}{جه^{2}}$

اور $\sum عہ \sum \frac{1}{عہ} = 4 + \sum \frac{عہ}{به}$

جواب:- $\frac{ق\,ر^{2} - 2ق^{2}س - ف\,ر\,س + 4س^{2}}{س^{2}}$

۱۰ — مساوات

$$لا^{ن} + ب_{1}\,لا^{ن-1} + ب_{2}\,لا^{ن-2} + \cdots\cdots + ب_{ن-1}\,لا + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے تفاعل $\sum \frac{عہ}{به^{2}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

جواب:- $\frac{ب_{ن-1}\,ب_{ن} - ب_{1}\,ب_{ن-1}^{2} + 2\,ب_{1}\,ب_{ن-2}\,ب_{ن}}{ب_{ن}^{2}}$

۱۲ — کعبی مساوات

$$ا_{0}\,لا^{3} + 3ا_{1}\,لا^{2} + 3ا_{2}\,لا + ا_{3} = ۰$$

کے سروں کی رقوم میں $\sum (ا_{0}عہ + ا_{1})^{2}(به - جه)^{2}$ کی قیمت معلوم کرو۔

جواب:- $\frac{18}{ا_{0}^{2}}(ا_{0}ا_{2} - ا_{1}^{2})^{2}$

۱۳ — مساوات

$$لا^{ن} + ب_{1}\,لا^{ن-1} + ب_{2}\,لا^{ن-2} + \cdots\cdots + ب_{ن-1}\,لا + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\sum \frac{عہ_{1}^{2} + عہ_{2}^{2}}{عہ_{1} + عہ_{2}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

دیا ہوا تفاعل شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:-

$$\text{عہ}_{۱}\left\{\frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}+\frac{۱}{\text{عہ}_{۲}}+\cdots\cdots+\frac{۱}{\text{عہ}_{\text{ن}}}\right\}-۱$$

$$+\ \text{عہ}_{۲}\left\{\frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}+\frac{۱}{\text{عہ}_{۲}}+\cdots\cdots+\frac{۱}{\text{عہ}_{\text{ن}}}\right\}-۱$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\ \text{عہ}_{\text{ن}}\left\{\frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}+\frac{۱}{\text{عہ}_{۲}}+\cdots\cdots+\frac{۱}{\text{عہ}_{\text{ن}}}\right\}-۱$$

یا $\Sigma\ \text{عہ}_{۱}\ \Sigma\ \frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}-\text{ن}$ ۔ پس وقس علیٰ ہذا

(56) **جواب** :- $\frac{\text{ب}_{۱}\ \text{ب}_{\text{ن}-۱}}{\text{ب}_{\text{ن}}}-\text{ن}$

۱۴ـــ مساوات

$$\sqrt{\text{ت}-\text{عہ}^{۲}}+\sqrt{\text{ت}-\text{بہ}^{۲}}+\sqrt{\text{ت}-\text{جہ}^{۲}}=۰$$

کو منطق شکل میں لاؤ اور ت میں حاصل ہونیوالی مساوات کے سروں کو کعبی مساوات مثال (۱) کے سروں کی رقوم میں بیان کرو ۔

جواب :- $۳\,\text{ت}^{۲}-۲\,(\text{ف}^{۲}-۲\text{ق})\,\text{ت}-\text{ف}^{۴}+۴\text{ف}^{۲}\text{ق}$

$-\ ۸\ \text{ف}\ \text{ر}=۰$

۱۵ـــ اگر مثال (۶) کے چار درجی کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{عہ}^{۲}+۱)(\text{بہ}^{۲}+۱)(\text{جہ}^{۲}+۱)(\text{ضہ}^{۲}+۱)=(۱-\text{ق}+\text{س})^{۲}+(\text{ف}-\text{ر})^{۲}$$

مساوات $\text{لا}^{۲}+۱=۰$ کی ہر اصل کو باری باری سے دفعہ ۱۶ کی مساوات متماثلہ میں درج کرو اور ضرب دو ۔

۱۶ـــ ن ویں درجہ کی عام مساوات کی اصلوں اور سروں کے درمیان ربط ذیل ثابت کرو:-

$$(\text{عہ}_{۱}^{۲}+۱)(\text{عہ}_{۲}^{۲}+۱)\cdots\cdots(\text{عہ}_{\text{ن}}^{۲}+۱)=(۱-\text{ب}_{۲}+\text{ب}_{۴}-\cdots\cdots)^{۲}+(\text{ب}_{۱}-\text{ب}_{۳}+\text{ب}_{۵}-\cdots)^{۲}$$

۱۷ ـــ (عہ^{2} + ۲) (بہ^{2} + ۲) (جہ^{2} + ۲) (ضہ^{2} + ۲)

کی عددی قیمت معلوم کرو جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات

لا^{4} - ۷ لا^{3} + ۸ لا^{2} - ۵ لا + ۱۰ = ۰

کی اصلیں ہیں۔

۱۸ ـــ اگر عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات

ا$_{0}$ لا^{4} + ۴ ا$_{1}$ لا^{3} + ۶ ا$_{2}$ لا^{2} + ۴ ا$_{3}$ لا + ا$_{4}$ = ۰

کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

ا$_{0}^{3}$ (بہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + بہ) (بہ + ضہ) (جہ + ضہ) (عہ + ضہ)

= ۱۶ { ۶ ا$_{0}$ ا$_{1}$ ا$_{2}$ ا$_{3}$ - ا$_{0}$ ا$_{3}^{2}$ - ا$_{1}^{2}$ ا$_{4}$ }

زیر بحث متشاکل تفاعل (مہ + نہ) (نہ + لہ) (لہ + مہ) یا ∑ لہ^{2} مہ نہ - لہ مہ نہ

کے مساوی ہے جہاں لہ، مہ، نہ کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۲۷ مثال ۱۷ میں دی گئی تھیں۔

۱۹ ـــ مثال ۹ کی چار درجی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل ∑ (عہ - بہ)^{4}

کی قیمت محسوب کرو۔

جواب :- ۳ ف^{4} - ۱۶ ف^{2} ق + ۲۰ ق^{2} + ۴ ف ر - ۱۶ س

۲۰ ـــ ثابت کرو کہ جب چار درجی کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے جیسا کہ مثال ۱۸ میں لکھا گیا ہے تو مثال ماسبق کے متشاکل تفاعل کی قیمت شکل ذیل میں لکھی جا سکتی ہے :-

ا$_{0}^{4}$ ∑ (عہ - بہ)^{4} = ۱۶ { ۴۸ (ا$_{0}$ ا$_{2}$ - ا$_{1}^{2}$)^{2} - ا$_{0}^{2}$ (ا$_{0}$ ا$_{4}$ - ۴ ا$_{1}$ ا$_{3}$ + ۳ ا$_{2}^{2}$) }

۲۱ ـــ ایک خط مستقیم پر نقطوں کے دو زوجوں کے فاصلے ایک ثابت مبداء سے جو اسی خط میں واقع ہے درجہ دوم کی مساواتوں

ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ ، اَ لا^{2} + بَ لا + جَ = ۰

کی اصلوں (عہ، بہ) اور (عہَ، بہَ) کے مساوی ہیں۔ اگر ایک زوج کے نقطے دوسرے زوج کے موسیقی مزدوج نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ذیل کا ربط موجود ہے :-

ا جَ + اَ ج - ۲ ب بَ = ۰

۲۲ ـــ ایک خط پر کے تین نقطوں ا، ب، ج کے فاصلے اسی خط پر کے

ایک ثابت مبداء و سے مساوات

ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلوں کے مساوی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں ا، ب، ج میں سے ایک نقطہ باقی دو نقطوں کے درمیانی فاصلے کی تنصیف کرے۔ (57)

دفعہ ۲۷ کی مثال ۱۵ سے مقابلہ کرو۔

جواب:- ا^{۲} د - ۳ ا ب ج + ۲ ب^{۳} = ۰

۲۳ — سوال گذشتہ کی ترتیم کو قائم رکھو اور وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں و، ا، ب، ج سے ایک موسیقی تقسیم بنے۔

جواب:- ا د^{۲} - ۳ ب ج د + ۲ ج^{۳} = ۰

اسکو مثال ۲۲ کے نتیجے سے اخذ کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ اصلوں کو ان کے متکافیوں میں بدلا جائے۔ یا اسکو بہ آسانی آزادانہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

۲۴ — اگر مساوات

ا لا^{۴} + ۴ ب لا^{۳} + ۶ ج لا^{۲} + ۴ د لا + ع = ۰

کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں ایسا ربط ہو کہ عہ - ضہ، بہ - ضہ، جہ - ضہ سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ

ا ج ع + ۲ ب ج د - ا د^{۲} - ب^{۲} ع - ج^{۳} = ۰

دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۲۵ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

(بہ جہ + سہ جہ عہ + سہ^{۲} عہ بہ) / (عہ + سہ بہ + سہ^{۲} جہ) ، (بہ جہ + سہ^{۲} جہ عہ + سہ عہ بہ) / (عہ + سہ^{۲} بہ + سہ جہ)

ہوں جہاں سہ^{۳} = ۱ اور عہ، بہ، جہ کعبی مساوات

ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلیں ہیں۔ **جواب**:- (ا ج - ب^{۲}) لا^{۲} + (ا د - ب ج) لا + (ب د - ج^{۲}) = ۰

دفعہ ۲۷ کی مثالوں ۱۳ اور ۱۴ سے مقابلہ کرو۔

۲۶ — (۲ بہ جہ - جہ عہ - عہ بہ)(۲ جہ عہ - عہ بہ - بہ جہ)(۲ عہ بہ - بہ جہ - جہ عہ)

(59)

جواب :- ۱ + ق + ف ر + ر۲ = ۰

۳۷ - وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی مساوات

لا۴ + ف لا۳ + ق لا۲ + ر لا + س = ۰

کی دو اصلوں عہ ، بہ میں رابطہ عہ بہ + ۱ = ۰ موجود ہو۔

مطلوبہ شرط ، س کی قوتوں میں مرتبہ ، حسب ذیل ہے

۱ + ق + ف ر + ر۲ + (ف۲ + ف ر - ۲ ق - ۱) س + (ق - ۱) س۲ + س۳ = ۰

۳۸ ــــ مساوات

لان + ب۱ لان-۱ + ب۲ لان-۲ + ... + بن = ۰

کی اصلوں کے تفاعل Σ (عہ۱ - عہ۲)۲ عہ۳ عہ۴ ..... عہن کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو بہ آسانی مثال ۱۳ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- (-۱)ن {ب۱ بن-۱ - ن۲ بن}

۳۹ ــــ اگر مساوات

ا۰ لان + ن ا۱ لان-۱ + (ن(ن-۱))/(۱×۲) ا۲ لان-۲ + ... + ان = ۰

کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ انکو جملہ

- ا۱/ا۰ ± ر/ا۰ √(۳(ا۱۲ - ا۰ ا۲)/(ن+۱))

میں (ن جفت ہو تو) ر کو ۱ ، ۳ ، ۵ ، .... ، ن - ۱ تمام قیمتیں دینے سے اور (ن طاق ہو تو) ۰ ، ۲ ، ۴ ، ۶ ، ...... ن - ۱ تمام قیمتیں دینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۴۰ ــــ تین مقداروں عہ ، بہ ، جہ کے فرقوں کو عہ۱ ، بہ۱ ، جہ۱ سے تعبیر کیا جائے یعنی

عہ۱ = بہ - جہ ، بہ۱ = جہ - عہ ، جہ۱ = عہ - بہ

تو ثابت کرو کہ

عہ۱۳ + بہ۱۳ + جہ۱۳ = ۳ عہ۱ بہ۱ جہ۱ ،

عہ۱۴ + بہ۱۴ + جہ۱۴ = ۱/۲ {عہ۱۲ + بہ۱۲ + جہ۱۲}۲

اور $\text{عہ}_1^5 + \text{بہ}_1^5 + \text{جہ}_1^5 = \frac{5}{2}\left\{\text{عہ}_1^2 + \text{بہ}_1^2 + \text{جہ}_1^2\right\} \text{عہ}_1 \text{بہ}_1 \text{جہ}_1$

مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا} - \text{ر} = 0$$

کی اصلوں کو عہ_1، بہ_1، جہ_1 لینے سے اور متشاکل تفاعلوں $\Sigma\,\text{عہ}_1^3$، $\Sigma\,\text{عہ}_1^4$، $\Sigma\,\text{عہ}_1^5$ کی قیمتوں کو ق اور ر کی رقوم میں محسوب کرنے سے مطلوبہ نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں۔ (مساوات بالا میں دوسری رقم غائب ہے کیونکہ اصلوں کا مجموعہ = ۰)۔ اس عمل کی توسیع کیجا سکتی ہے اور $\Sigma\,\text{عہ}_1^6$، $\Sigma\,\text{عہ}_1^7$ وغیرہ کے لئے ضوابط معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ اسلئے متواتر قوتوں کے مجموعے حاصل ضرب $\text{عہ}_1 \text{بہ}_1 \text{جہ}_1$ اور حاصل جمع $\text{عہ}_1^2 + \text{بہ}_1^2 + \text{جہ}_1^2$ کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں۔ انمیں سے پہلا ر کے مساوی اور دوسرا $-2(\text{بہ}_1\text{جہ}_1 + \text{جہ}_1\text{بہ}_1 + \text{عہ}_1\text{بہ}_1)$ یعنی -2ق کے مساوی ہے۔ اِن مجموعوں کو طریقہ ذیل پر محسوب کیا جا سکتا ہے:—

مساوات $\text{لا}^3 = \text{ر} - \text{ق}\,\text{لا}$ اور اس کا مربع، مکعب وغیرہ لیکر حاصل ہونیوالی مساواتوں کی مدد سے اور لا، یا لا^2 سے ضرب دینے کے بعد لا کی کسی قوت کو مثلاً $\text{لا}^{\text{ن}}$ کو متواتر تحویلوں کے ذریعہ شکل $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^2$ میں لایا جا سکتا ہے جہاں ا، ب، ج تفاعل ہیں ق اور ر کے۔ پھر عہ_1، بہ_1، جہ_1 کو مندرج کر کے جمع کرنے سے حاصل ہوگا $\Sigma\,\text{عہ}_1^{\text{ن}} = 3\text{ا} - 2\text{ق}\,\text{ج}$۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی طریقہ سے $\Sigma\,\text{عہ}_1^7 = 7\text{ق}^2\text{ر}$، $\Sigma\,\text{عہ}_1^{11} = 11\text{ق}\,\text{ر}(\text{ق}^3 - \text{ر}^2)$ کو ثابت کر سکتا ہے۔

چوتھا باب

مساواتوں کا استحالہ

۲۹ ـ مساواتوں کا استحالہ ـ بہت سی مثالوں میں کسی مساوات کی اصلوں کی قیمتیں، سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر ہم اسکو معمولی اندراجات کے ذریعہ یا اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی مدد سے دوسری ایسی مساوات میں تحویل کرسکتے ہیں، جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے ساتھ مقررہ روابط رکھتی ہوں۔ اس قسم کے استحالے سے مساوات کی اصلوں وغیرہ پر بحث کرنے میں بڑی مدد ملتی ہے۔ اب ہم اہم ترین ابتدائی استحالوں کی تشریح کرینگے۔

۳۰ ـ اصلیں بہ تبدیل علامت ـ ایک مساوات کو دوسری مساوات میں تحویل کرنیکے لئے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے مساوی مگر مختلف العلامت ہوں فرض کروکہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

کی اصلیں $\text{ع}_{۱}$، $\text{ع}_{۲}$، $\text{ع}_{۳}$، .... $\text{ع}_{\text{ن}}$ ہیں۔ تب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ب_{ن} \equiv (لا - ع_{۱})(لا - ع_{۲})\ldots(لا - ع_{ن})$$

اب اگر لا کو ـ ما میں بدلدیا جائے تو خواہ ن جفت ہو یا طاق ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$ما^{ن} - ب_{۱} ما^{ن-۱} + ب_{۲} ما^{ن-۲} - \ldots\ldots \pm ب_{ن-۱} ما \mp ب_{ن} \equiv (ما + ع_{۱})\ldots(ما + ع_{ن})$$

اسلئے ما کے اس کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ایسی مساوات ملیگی جسکی اصلیں ہونگی ـ $ع_{۱}$، ـ $ع_{۲}$، ـ $ع_{۳}$، ..... ـ $ع_{ن}$ ـ اس لئے مطلوبہ استحالہ حاصل کرنیکے لئے دی ہوئی مساوات کی دوسری، چوتھی، چھٹی وغیرہ رقموں کی صرف علامتیں بدلنی چاہئیں ـ

مثالیں

۱ــ ایسی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$لا^{۵} + ۷ لا^{۴} + ۷ لا^{۳} - ۸ لا^{۲} + لا + ۱ = ۰$$

کی اصلیں بہ تبدیل علامت ہوں ـ

جواب :- $لا^{۵} - ۷ لا^{۴} + ۷ لا^{۳} + ۸ لا^{۲} + لا - ۱ = ۰$

(61)

۲ــ مساوات

$$لا^{۶} + ۳ لا^{۵} + لا^{۳} - لا^{۲} + ۷ لا + ۲ = ۰$$

کی اصلوں کی علامتیں تبدیل کرو ـ

(غیر موجود رقموں کو صفر سر کے ساتھ مساوات میں داخل کرو) ـ

جواب :- $لا^{۶} + ۳ لا^{۵} + لا^{۳} + لا^{۲} + ۷ لا - ۲ = ۰$

۳۱ــ دی ہوئی مقدار سے اصلونکو ضرب دینا ـ اگر ایک مساوات کو جسکی اصلیں $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$، ..... $ع_{ن}$ ہیں دوسری ایسی مساوات میں

تحویل کرنا ہو جسکی اصلیں م عہ$_۱$، م عہ$_۲$، ..... م عہ$_ن$ ہوں تو دفعہ ماسبق کی متماثلہ میں لا کی بجائے $\frac{ما}{م}$ درج کرو۔ پھر اسکو م^ن سے ضرب دو تو

$$ما^ن + م\,ب_۱\,ما^{ن-۱} + م^۲\,ب_۲\,ما^{ن-۲} + \ldots + م^{ن-۱}\,ب_{ن-۱}\,ما + م^ن\,ب_ن$$

$$\equiv (ما - م\,عہ_۱)(ما - م\,عہ_۲)\ldots\ldots(ما - م\,عہ_ن)$$

پس مساوات کی اصلوں کو دی ہوئی مقدار م سے ضرب دینا ہو تو متواتر سروں کو دوسری رقم سے شروع کرکے علی الترتیب م، م^۲، م^۳.... م^ن سے ضرب دینا چاہیے

یہ تحویل اسوقت کارآمد ہوتی ہے جب دی ہوئی مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک نہ ہو اور اسکو ایک بنانا مطلوب ہو اور عام طور پر اس تحویل کو مساوات سے کسری سروں کو دور کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر پہلی رقم کا سر ا ہو تو ہم ایسی مساوات بناتے ہیں جسکی اصلیں ا عہ$_۱$، ا عہ$_۲$..... ا عہ$_ن$ ہوں یہ تحویل شدہ مساوات ا سے پوری طرح تقسیم ہو جائیگی اور ایسی تقسیم عمل میں لانیکے بعد لا^ن کا سر ایک ہو جائیگا۔

جب کچھ سر کسری ہوں تو کسروں کے تمام نسب نماؤں کا ذو اضعاف اقل م معلوم کرو اور مساوات کی اصلوں کو مقدار م سے ضرب دو تو وہ مساوات ملیگی جو کسروں سے آزاد ہوگی۔ بہت سی صورتوں میں ذو اضعاف اقل سے چھوٹی مقدار سے ضرب دینا اس مقصد کے لئے کافی ہوگا جیساکہ ذیل کی مثالوں سے ظاہر ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$۳لا^۴ - ۴لا^۳ + ۴لا^۲ - ۲لا + ۱ = ۰$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسکی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔

ہم اصلوں کو ۳ سے ضرب دیتے ہیں۔

جواب:- $\text{لا}^{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳} + ۱۲\,\text{لا}^{۲} - ۱۸\,\text{لا} + ۲۷ = ۰$

۲ — مساوات

$$\text{لا}^{۳} - \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۲}{۳}\,\text{لا} - ۱ = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

اصلوں کو ۶ سے ضرب دو۔ **جواب:-** $\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۲۴\,\text{لا} - ۲۱۶ = ۰$

(62)

۳ — مساوات

$$\text{لا}^{۳} - \frac{۵}{۲}\,\text{لا}^{۲} - \frac{۷}{۱۸}\,\text{لا} + \frac{۱}{۱۰۸} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

ان کسروں کے نسب نماوں کے اجزائے ضربی پر غور کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ انکے ذو اضعاف اقل سے بہت چھوٹا عدد کسروں کو دور کرنیکے لئے کافی ہے۔ اگر مطلوبہ ضرب دینے والا عدد م ہو تو تحویل شدہ مساوات لکھی جائیگی

$$\text{لا}^{۳} - \text{م}\,\frac{۵}{۲}\,\text{لا}^{۲} - \text{م}^{۲}\,\frac{۷}{۲\times ۳^{۲}}\,\text{لا} + \text{م}^{۳} \times \frac{۱}{۲^{۲}\times ۳^{۳}} = ۰$$

اب یہ ظاہر ہے کہ اگر م کو ۶ کے مساوی لیا جائے تو ہر سر صحیح عدد بن جائیگا۔ پس صرف ۶ سے ضرب دینا ہوگا۔

جواب:- $\text{لا}^{۳} - ۱۵\,\text{لا}^{۲} - ۱۴\,\text{لا} + ۲ = ۰$

۴ — مساوات

$$\text{لا}^{۴} + \frac{۳}{۱۰}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۱۳}{۲۵}\,\text{لا} + \frac{۷۷}{۱۰۰۰} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

اس قسم کی مثالوں میں طالب علم کو چاہئیے کہ غیر موجود رقموں کو صفر سروں کے ساتھ مساوات میں داخل کرے۔ مطلوبہ ضارب ۱۰ ہے۔

جواب:- $\text{لا}^{۴} + ۳۰\,\text{لا}^{۲} + ۵۲۰\,\text{لا} + ۷۷۰ = ۰$

۵ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{۴} - \frac{۵}{۶}\text{لا}^{۳} + \frac{۵}{۱۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۱۳}{۹۰۰} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

جواب: ـ $\text{لا}^{۴} - ۲۵\,\text{لا}^{۳} + ۳۷۵\,\text{لا}^{۲} - ۱۱۷۰۰ = ۰$

۳۲ ـــ متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں۔ اگر ایک مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں تحویل کرنا ہو جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متکافی ہوں تو ہم دفعہ ۳۰ کی متماثلہ میں لا کی بجائے $\frac{1}{\text{ما}}$ درج کرتے ہیں۔ اس اندراج سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\text{ما}^{ن}} + \frac{ب_{1}}{\text{ما}^{ن-۱}} + \frac{ب_{۲}}{\text{ما}^{ن-۲}} + \cdots\cdots + ب_{ن} \equiv \frac{ب_{ن}}{\text{ما}^{ن}}\left(\text{ما} - \frac{1}{عہ_{1}}\right)\left(\text{ما} - \frac{1}{عہ_{۲}}\right)\cdots\cdots\left(\text{ما} - \frac{1}{عہ_{ن}}\right)$$

یا

$$\text{ما}^{ن} + \frac{ب_{ن-۱}}{ب_{ن}}\text{ما}^{ن-۱} + \frac{ب_{ن-۲}}{ب_{ن}}\text{ما}^{ن-۲} + \cdots\cdots + \frac{ب_{1}}{ب_{ن}}\text{ما} + \frac{1}{ب_{ن}}$$

$$\equiv \left(\text{ما} - \frac{1}{عہ_{1}}\right)\left(\text{ما} - \frac{1}{عہ_{۲}}\right)\cdots\cdots\left(\text{ما} - \frac{1}{عہ_{ن}}\right)$$

پس اگر دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{1}{\text{ما}}$ درج کیا جائے اور اسکو $\text{ما}^{ن}$ سے ضرب دیا جائے تو حاصل کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھنے سے وہ مساوات ملیگی جسکی اصلیں $عہ_{1}، عہ_{۲}، \ldots\ldots عہ_{ن}$ کے متکافی ہونگی۔

بعض مساواتیں ایسی ہوتی ہیں جنمیں لا کی بجاے اسکا متکافی درج کرنے سے انمیں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔ انکو ہم متکافی مساواتیں کہینگے۔

(63

ابھی ہم نے جو اوپر ثابت کیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ اس جماعت سے متعلق مساوات شرائط ذیل کو پورا کریگی:-

$$\frac{ب_{ن-۱}}{ب_ن} = ب_۱ ،\ \frac{ب_{ن-۲}}{ب_ن} = ب_۲ ، \text{وغیرہ}\ \frac{ب_۱}{ب_ن} = ب_{ن-۱} ،\ \frac{۱}{ب_ن} = ب_ن$$

انمیں سے آخری شرط سے حاصل ہوگا $ب_ن^۲ = ۱$ یعنی $ب_ن = \pm ۱$ -
اسلئے منکافی مساواتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایک جماعت وہ جسمیں $ب_ن = +۱$ اور دوسری وہ جس میں $ب_ن = -۱$ -

(۱) پہلی صورت میں روابط ہونگے

$$ب_{ن-۱} = ب_۱ ،\ ب_{ن-۲} = ب_۲ ، \ldots\ldots ،\ ب_۱ = ب_{ن-۱}$$

اِن سے پہلی جماعت کی منکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنمیں ابتدا اور آخر سے لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقداریں مساوی اور ہم علامت ہونگے۔

(۲) دوسری صورت میں یعنی جبکہ $ب_ن = -۱$ روابط ہونگے

$$ب_{ن-۱} = -ب_۱ ،\ ب_{ن-۲} = -ب_۲ ، \text{وغیرہ} \ldots\ldots ب_۱ = -ب_{ن-۱}$$

اِن سے دوسری جماعت کی منکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنمیں ابتدا اور آخر سے لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقداریں مساوی مگر مختلف العلامت ہونگے۔ یہاں یہ بات یاد رہے کہ جب اس جماعت کی کسی مساوات کا درجہ جفت ہو مثلاً $ن = ۲م$ تو ایک شرط ہو جائیگی $ب_م = -ب_م$ یعنی $ب_م = ۰$ - اس لئے دوسری جماعت کی منکافی مساوات میں جسکا درجہ جفت ہو درمیانی رقم نہیں ہوتی -

اگر منکافی مساوات کی ایک اصل عہ ہو تو $\frac{۱}{عہ}$ بھی اسکی ایک اصل ہونی چاہئیے کیونکہ یہ استحالہ شدہ مساوات کی اصل ہے اور استحالہ شدہ مساوات دی ہوئی مساوات کے مماثل ہے۔ پس منکافی مساوات کی اصلیں زوجوں عہ، $\frac{۱}{عہ}$ ، بہ، $\frac{۱}{بہ}$ وغیرہ میں واقع ہوتی ہیں۔ جب مساوات کا درجہ طاق ہو تو

ایک اصل ایسی ہونی چاہئے جو خود اپنی متکافی ہو اور مساوات کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ -۱ یا +۱ ایسی صورت میں ایک اصل ہو گی بموجب اسکے کہ مساوات پہلی جماعت سے یا دوسری جماعت سے متعلق ہو۔ دونوں صورتوں میں ہم معلومہ جزو ضربی (لا + ۱ یا لا - ۱) سے تقسیم کر سکتے ہیں اور عمل تقسیم سے جفت درجہ کی متکافی مساوات حاصل ہو گی جو پہلی جماعت سے متعلق ہو گی دوسری جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں لا^{2} - ۱ جزو ضربی ہو گا کیونکہ مساوات کو شکل

$$لا^{ن} - ۱ + ب_{۱}\, لا\,(لا^{ن-۲} - ۱) + \ldots\ldots = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

لا^{2} - ۱ سے تقسیم کرنے سے اسکو بھی پہلی جماعت کی جفت درجہ کی متکافی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ پس تمام متکافی مساواتوں کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اور اسلئے پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات کو معیاری مساوات قرار دیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^{۴} - ۳\, لا^{۳} + ۷\, لا^{۲} + ۵\, لا - ۲ = ۰$$

کی اصلوں کے متکافی ہوں۔

جواب:- $۲\, ا^{۴} - ۵\, ا^{۳} - ۷\, ا^{۲} + ۳\, ا - ۱ = ۰$

۲۔ $لا^{۶} + \frac{۵}{۶}\, لا^{۵} - \frac{۳۲}{۳}\, لا^{۴} + \frac{۳۲}{۳}\, لا^{۲} - \frac{۵}{۶}\, لا - ۱ = ۰$

کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

۲۳۔ اصلوں کو بقدر ایک دی ہوئی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا۔

اس قسم کے استحالہ کیلئے ہم کثیر الارقام ف (لا) کے متغیر لا کو ما + ھ میں بدل دیتے ہیں۔ ما میں محصلہ مساوات کی ہر اصل دی ہوئی لا کی مساوات کی ہر اصل سے چھوٹی یا بڑی ہوگی بموجب اسکے کہ ھ مثبت یا منفی ہو۔ محصلہ مساوات ہوگی (دیکھو دفعہ ٦)

$$ف(ھ) + فَ(ھ)\,ما + \frac{فً(ھ)}{۱ \times ۲}\,ما^{۲} + \ldots\ldots = ۰$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ مشتق تفاعلوں کو راست محسوب کرکے انہیں دی ہوئی مقدار ھ درج کرنا محنت طلب امر ہے۔ اسلئے ہم اس مساوات کو بنانیکا ایک آسان طریقہ بیان کرتے ہیں جو عملی مقاصد کیلئے زیادہ کارآمد و سہولت بخش ہے۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$ا_{۰}لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} + ا_{۲}لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ا_{ن-۱}لا + ا_{ن} = ۰$$

اور فرض کرو کہ ما میں تحویل شدہ کثیر الارقام ہے

$$ا_{۰}ما^{ن} + ا'_{۱}ما^{ن-۱} + ا'_{۲}ما^{ن-۲} + \ldots\ldots + ا'_{ن-۱}ما + ا'_{ن}$$

اب چونکہ ما = لا - ھ اسلئے یہ کثیر الارقام

$$ا_{۰}(لا-ھ)^{ن} + ا'_{۱}(لا-ھ)^{ن-۱} + \ldots\ldots + ا'_{ن-۱}(لا-ھ) + ا'_{ن}$$

کے مماثل ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر دئیے ہوے کثیر الارقام کو لا-ھ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $ا'_{ن}$ ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$ا_{۰}(لا-ھ)^{ن-۱} + ا'_{۱}(لا-ھ)^{ن-۲} + \ldots\ldots + ا'_{ن-۲}(لا-ھ) + ا'_{ن-۱}$$

اگر اسکو پھر لا-ھ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $ا'_{ن-۱}$ ہوگا اور خارج قسمت ہوگا۔

$$ا_{۰}(لا-ھ)^{ن-۲} + ا'_{۱}(لا-ھ)^{ن-۳} + \ldots\ldots + ا'_{ن-۲}$$

اس عمل کو جاری رکھکر ہم معمولی حسابی اعمال کی تکرار سے (جو دفعہ ۸ میں بیان ہوئے ہیں) تحویل شدہ مساوات کے سروں ب$_ن$، ب$_{ن-۱}$، ب$_{ن-۲}$ وغیرہ کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم کر سکتے ہیں۔ آخری سر ب$_۰$، ا$_۰$ کے مساوی ہوگا۔ کسی آئندہ باب میں یہ معلوم ہوگا کہ عددی مساواتوں کو حل کرنیکا بہترین عملی طریقہ صرف اس عمل کی توسیع ہے جو ذیل کی مثالوں میں استعمال کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

لا^۴ - ۵لا^۳ + ۷لا^۲ - ۱۷لا + ۱۱ = ۰

کی اصلوں سے بقدر ۴ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

عمل حساب بہترین طریقہ پر ذیل سے ظاہر ہے

۱۱	-۱۷	۷	-۵	۱
-۲۰	۱۲	-۴	۴	
-۹	-۵	۳	-۱	
	۶۰	۱۲	۴	
	۵۵	۱۵	۳	
		۲۸	۴	
		۴۳	۷	
			۴	
			۱۱	

(66)

یہاں دیئے ہوئے کثیر الارقام کو اول لا - ۴ سے تقسیم کیا گیا جس سے باقی -۹ (= ب$_۴$) اور خارج قسمت لا^۳ - لا^۲ + ۳لا - ۵ حاصل ہوا (دیکھو دفعہ ۸)۔ اسکو پھر لا - ۴ سے تقسیم کیا گیا تو باقی ۵۵ (= ب$_۳$) اور خارج قسمت لا^۲ + ۳لا + ۱۵ حاصل ہوا۔

پھر تقسیم کرنے سے باقی ۳۴۳ (= $ا_۲$) اور خارج قسمت لا + ۷ اور اس کو تقسیم کرنے سے $ا_۱$ = ۱۱ اور $ا_۰$ = ۱ - پس مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ما}^{۴} + ۱۱\,\text{ما}^{۳} + ۳۴\,\text{ما}^{۲} + ۵۵\,\text{ما} - ۹ = ۰$$

۲ ــــ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^{۵} + ۴\,\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} + ۱۱ = ۰$$

کی اصلوں سے بقدر ۳ کے گھٹی ہوئی ہوں -

۱۱	۰	۱-	۴	۰	۱
۳۴۲	۱۱۴	۳۹	۹	۳	
۳۵۳	۱۱۴	۳۸	۱۳	۳	
	۳۹۳	۹۳	۱۸	۳	
	۵۰۷	۱۳۱	۳۱	۶	
		۱۷۴	۲۷	۳	
		۳۰۵	۵۸	۹	
			۳۶	۳	
			۹۴	۱۲	
				۱۵	

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{لا}^{۵} + ۱۵\,\text{لا}^{۴} + ۹۴\,\text{لا}^{۳} + ۳۰۵\,\text{لا}^{۲} + ۵۰۷\,\text{لا} + ۳۵۳ = ۰$$

۳ ــــ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$۴\,\text{لا}^{۵} - ۲\,\text{لا}^{۲} + ۷\,\text{لا} - ۳ = ۰$$

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے زیادہ ہوں -

اس عمل میں ضارب صریحاً -۲ ہے -

جواب: - $۴\,\text{ما}^{۵} - ۴۰\,\text{ما}^{۴} + ۱۵۸\,\text{ما}^{۳} - ۳۰۸\,\text{ما}^{۲} + ۳۰۳\,\text{ما} - ۱۲۹ = ۰$

۴ ــــ مساوات

$$۳\,\text{لا}^{۴} + ۷\,\text{لا}^{۳} - ۱۵\,\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۲ = ۰$$

کی اصلوں کو بقدر ۷ کے بڑھاؤ۔

جواب:- ۳ ما^{۴} − ۷۷ ما^{۳} + ۲۰۷ ما^{۲} − ۶۲۸۷ ما + ۴۰۵۸ = ۰

۵ ـــ مساوات

۵ لا^{۳} − ۱۳ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۷ = ۰

کو بقدر ۲۳ کے گھٹاؤ۔

یہاں بہتر یہ ہوگا کہ پہلے اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹایا جائے۔ پھر استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹایا جائے۔ اس دوہرے عمل کو ذیل میں واضح کیا گیا ہے جہاں ہر عمل کا اختتام شکستہ خط سے دکھایا گیا ہے۔ (67)

۵	−۱۳	−۱۲	۷
	۱۰۰	۱۷۴۰	۳۴۵۶۰
	۸۷	۱۷۲۸	۳۴۵۶۷
	۱۰۰	۳۷۴۰	۱۹۱۲۲
	۱۸۷	۵۴۶۸	۵۳۶۸۹
	۱۰۰	۹۰۶	
	۲۸۷	۶۳۷۴	
	۱۵	۹۵۱	
	۳۰۲	۷۳۲۵	
	۱۵		
	۳۱۷		
	۱۵		
	۳۳۲		

جواب:- ۵ ما^{۳} + ۳۳۲ ما^{۲} + ۷۳۲۵ ما + ۵۳۶۸۹ = ۰

۳۴ ـــ رقموں کا اخراج ۔ دفعہ گذشتہ کے استحالہ سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مساوات سے کسی مخصوص رقم کو خارج کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے سے

اس کے حل کرنے میں اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے ۔ ما کی قوتوں میں استحالہ شدہ مساوات کو ترتیب دینے سے حاصل ہوگا

$$ا_. ما^ن + (ن ا_. ھ + ا_۱) ما^{ن-۱} + \left\{ \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ا_. ھ^۲ + (ن-۱) ا_۱ ھ + ا_۲ \right\} ما^{ن-۲}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots = .$$

اگر ھ ایسا ہو کہ مساوات ن ا. ھ + ا۱ = ۰ کو پورا کرے تو استحالہ شدہ مساوات میں دوسری رقم غائب ہوگی ۔ اگر ھ ایسا ہو کہ وہ مساوات

$$\frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ا_. ھ^۲ + (ن-۱) ا_۱ ھ + ا_۲ = .$$

کی دو اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو استحالہ شدہ مساوات میں تیسری رقم غائب ہوگی ۔ چوتھی رقم کا اخراج ھ کے کعبی کے حل پر منحصر ہوگا آخری رقم کو خارج کرنے کے لئے مساوات ف (ھ) = ۰ کو حل کرنا ہوگا جسکے معنی ابتدائی مساوات کو حل کرنیکے ہیں ۔

(68)

مثالیں

۱ ـــ مساوات

$$لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۴ لا - ۷ = .$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسکی دوسری رقم موجود نہ ہو ۔

ن ا. ھ + ا۱ = ۰ سے ھ = ۲

اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ ۔

جواب :ـ $ما^۳ - ۸ ما - ۱۵ = .$

۲ ـــ مساوات

$$لا^۴ + ۸ لا^۳ + لا - ۵ = .$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسمیں دوسری رقم موجود نہ ہو ۔

اصلوں کو بقدر ۲ کے زیادہ کرو ۔ **جواب :ـ** $ما^۴ - ۲۴ ما^۲ + ۶۵ ما - ۵۵ = .$

۳۔ مساوات

$$\text{لا}^{4} - 4\,\text{لا}^{3} - 18\,\text{لا}^{2} - 3\,\text{لا} + 2 = 0$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسمیں تیسری رقم موجود نہ ہو۔

ھ کے لئے مساوات درجہ دوم ہوگی

$$6\,\text{ھ}^{2} - 12\,\text{ھ} - 18 = 0$$، جس سے ھ = ۳، ھ = −۱

اس لئے دی ہوئی مساوات کو تحویل کرنیکے دو طریقے ہیں۔

اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹانے سے حاصل ہوگا

$$(1)\quad \text{ما}^{4} + 8\,\text{ما}^{3} - 111\,\text{ما} - 196 = 0$$

اصلوں کو بقدر ایک کے بڑھانے سے حاصل ہوگا

$$(2)\quad \text{ما}^{4} - 8\,\text{ما}^{3} + 17\,\text{ما} - 8 = 0$$

۳۵۔ ثنائی سر۔

بہت سے جبری اعمال میں کثیر الارقام ف(لا) کو شکل ذیل میں لکھنا سہولت بخش ہوتا ہے:۔

$$\text{ا}_{0}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}_{1}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ا}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ا}_{\text{ن}-2}\text{لا}^{2} + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

جسمیں ہر رقم کا سر حرفی سر کے علاوہ ایک عددی سر پر مشتمل ہے جو $(\text{لا}+1)^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی متناظر رقم کے سر کے مساوی ہے جب اسے مسئلہ ثنائی سے پھیلایا جائے۔ اس طریقہ پر لکھی ہوئی مساواتوں کی مثالیں دفعہ ۲۷ کے ۱۳ ویں اور ۱۶ ویں سوالات میں دی گئی ہیں۔ یہ شکل ایسی ہے جسمیں ہر کثیر الارقام کو فوراً تحویل کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ترقیم ذیل اختیار کرتے ہیں:۔

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ا}_{0}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}_{1}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ا}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

یہاں ع لاحقہ ن کے ساتھ ن ویں درجہ کے کثیر الارقام کو تعبیر کرتا ہے جو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا گیا ہو۔

(69) اس لئے ن کو ن-۱، ن-۲ وغیرہ میں بدلنے سے

$$\text{ع}_{\text{ن}-۱} = \text{ا}_. \text{لا}^{\text{ن}-۱} + (\text{ن}-۱)\text{ا}_۱ \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + (\text{ن}-۱)\text{ا}_{\text{ن}-۲}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-۱}$$

$$\text{ع}_{\text{ن}-۲} = \text{ا}_. \text{لا}^{\text{ن}-۲} + (\text{ن}-۲)\text{ا}_۱ \text{لا}^{\text{ن}-۳} + \ldots\ldots + (\text{ن}-۲)\text{ا}_{\text{ن}-۳}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-۲}$$

. . . .

$$\text{ع}_۳ = \text{ا}_. \text{لا}^۳ + ۳\,\text{ا}_۱ \text{لا}^۲ + ۳\,\text{ا}_۲ \text{لا} + \text{ا}_۳$$

$$\text{ع}_۲ = \text{ا}_. \text{لا}^۲ + ۲\,\text{ا}_۱ \text{لا} + \text{ا}_۲$$

$$\text{ع}_۱ = \text{ا}_. \text{لا} + \text{ا}_۱$$

$$\text{ع}_. = \text{ا}_.$$

ثنائی شکل میں رکھنے سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مشتق تفاعلوں کو فوراً لکھا جا سکتا ہے۔ چنانچہ $\text{ع}_\text{ن}$ کا پہلا مشتق تفاعل صریحاً ہے

$$\text{ن}\left\{\text{ا}_. \text{لا}^{\text{ن}-۱} + (\text{ن}-۱)\text{ا}_۱ \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲}\text{ا}_۲ \text{لا}^{\text{ن}-۳} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\right\}$$

یعنی $\text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}-۱}$۔ اس لئے اس طور پر تعبیر شدہ کثیر الارقام کا پہلا مشتق تفاعل ع کے لاحقہ پر اُس قانون کو استعمال کر کے لکھا جا سکتا ہے جو دفعہ ۶ میں متغیر کے قوت نما کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے۔ مثلاً $\text{ع}_۴$ کا پہلا مشتق تفاعل اس کو ۴ سے ضرب دیکر اس کے لاحقہ کو بقدر ایک کے گھٹانے سے بنایا جا سکتا ہے۔ اس لئے یہ مشتق تفاعل $۴\,\text{ع}_۳$ ہے جسکی تصدیق طالب علم آسانی سے کر سکتا ہے۔

اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ کثیر الارقام $\text{ع}_\text{ن}$ یعنی

$$\text{ا}_. \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}_۱ \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\text{ا}_۲ \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ا}_\text{ن}$$

میں لا کی بجائے ما + ھ درج کرنے سے اسکو شکل

$$ا_. ما^ن + ن ا_١ ما^{ن-١} + \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} ا_٢ ما^{ن-٢} + \ldots + ن ا_{ن-١} ما + ا_ن$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے جہاں

$$ا_.، ا_١، ا_٢، \ldots ا_{ن-١}، ا_ن$$

وہ تفاعل ہیں جو

$$ع_.، ع_١، ع_٢، \ldots، ع_{ن-١}، ع_ن$$

میں لا کی بجائے ھ درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$ا_. = ا_.، \quad ا_١ = ا_. ھ + ا_١، \quad ا_٢ = ا_. ھ^٢ + ٢ ا_١ ھ + ا_٢،$$ وغیرہ

اگر ف (ھ) کے مشتق تفاعلوں کو لاحقوں سے تعبیر کیا جائے جیسا کہ دفعہ ٦ میں بتایا گیا ہے تو ہم تحویل شدہ تفاعل یعنی ف (ما + ھ) کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں: — (٦٥)

$$ف(ھ) + ف_١(ھ) ما + \frac{ف_٢(ھ)}{١ \times ٢} ما^٢ + \ldots + \frac{ف_{ن-١}(ھ)}{١ \times ٢ \times \ldots (ن-١)} ما^{ن-١}$$
$$+ \frac{ف_ن(ھ)}{١ \times ٢ \times \ldots \times ن} ما^ن$$

عن میں لا کی بجائے ھ درج کیا جائے تو ف (ھ) حاصل ہوتا ہے اسلئے وہ ان کے مساوی ہے۔ اس کا پہلا مشتق قانون متذکرۂ بالا کی بموجب

ن $ا_{ن-١}$ ہے۔ پھر اسکا پہلا مشتق ن (ن - ١) $ا_{ن-٢}$ ہے اور علیٰ ہذا۔

ان اندراجات کو عمل میں لانے سے نتیجہ بالا حاصل ہوتا ہے جس سے ہم استحالہ شدہ مساوات کو بغیر کسی حسابی عمل کے فوراً لکھ سکتے ہیں۔

مثالیں

۱ــــ کثیر الارقام

$$\text{ا}_0\text{لا}^3+3\text{ا}_1\text{لا}^2+3\text{ا}_2\text{لا}+\text{ا}_3$$

میں لا کی بجائے ما + ھ درج کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہو اسکو معلوم کرو۔

جواب:- $\text{ا}_0\text{ما}^3+3(\text{ا}_0\text{ھ}+\text{ا}_1)\text{ما}^2+3(\text{ا}_0\text{ھ}^2+2\text{ا}_1\text{ھ}+\text{ا}_2)$

$+\text{ا}_0\text{ھ}^3+3\text{ا}_1\text{ھ}^2+3\text{ا}_2\text{ھ}+\text{ا}_3$

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ اس نتیجہ کی تصدیق دفعہ ۳۳ میں بتلائے ہوئے حساب کے طریقہ سے کرے جسکو جبری اور نیز عددی مثالوں کی صورت میں استعمال کرنے سے اکثر فائدہ ہوتا ہے۔

۲ــــ مساوات

$$\text{ا}_0\text{لا}^3+3\text{ا}_1\text{لا}^2+3\text{ا}_2\text{لا}+\text{ا}_3=0$$

سے دوسری رقم خارج کرو۔

اِس کی اصلوں کو بقدر اُس مقدار ھ کے گھٹانا چاہئے جو مساوات

$$\text{ا}_0\text{ھ}+\text{ا}_1=0$$

سے حاصل ہو یعنی اصلوں کو بقدر $-\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}$ کے گھٹانا چاہئے۔

ھ کی اس قیمت کو ا_2 اور ا_3 میں درج کرنے سے ما میں حاصل ہونیوالی مساوات ہوگی

$$\text{ما}^3+\frac{3(\text{ا}_0\text{ا}_2-\text{ا}_1^2)}{\text{ا}_0^2}\text{ما}+\frac{\text{ا}_0^2\text{ا}_3-3\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2+2\text{ا}_1^3}{\text{ا}_0^3}=0$$

۳ــــ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات $\text{ع}_\text{ن}=0$ کی دوسری اور تیسری رقمیں ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں ھ کی ایک ہی قیمت کے لئے ا_1 اور ا_2 دونوں کو معدوم ہونا چاہئیے۔ ان سے ھ کو ساقط کردینے سے ہمیں مطلوبہ شرط ملیگی۔

جواب :- $ا ا_۲ - ا_۱^۲ = ۰$

۴ ـــ مساوات

$$لا^۳ + ۶ لا^۲ + ۱۲ لا - ۱۹ = ۰$$

سے دوسری رقم خارج کرکے اسکو حل کرو۔

ایک ہی اندراج سے تیسری رقم بھی خارج ہوگی اور حاصل ہوگا

$$ما^۳ - ۲۷ = ۰$$

(۷۱) مطلوبہ اصلیں اس مساوات کی اصلوں میں سے ۲ تفریق کرنے سے حاصل ہونگی۔

۵ ـــ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات $ع_ن = ۰$ کی دوسری اور چوتھی رقمیں ایک ہی اندراج سے خارج ہوسکیں۔

یہاں ھ کی ایک ہی قیمت کے لئے $ا_۱$ اور $ا_۳$ دونوں کو معدوم ہوجانا چاہیئے۔ اسلئے مساواتوں

$$ا ھ + ا_۱ = ۰ ، ا ھ^۳ + ۳ ا_۱ ھ^۲ + ۳ ا_۲ ھ + ا_۳ = ۰$$

سے ھ کو ساقط کردیا جائے تو مطلوبہ شرط ہوگی

$$ا^۲ ا_۳ - ۳ ا ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳ = ۰$$

نوٹ :- مساوات درجہ چہارم کے سروں کے درمیان جب یہ شرط پوری ہو تو اسکو مساوات درجہ دوم میں تحویل کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب دوسری رقم خارج کردی جاتی ہے تو محصلہ مساوات $ما^۲$ میں درجہ دوم کی مساوات ہوگی اور ما کی قیمتوں سے لا کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

۶ ـــ مساوات

$$لا^۴ + ۱۶ لا^۳ + ۷۲ لا^۲ + ۶۴ لا - ۱۲۹ = ۰$$

کی دوسری رقم خارج کرکے اسکو حل کرو۔

ما میں مساوات ہوگی

$$ما^۴ - ۲۴ ما^۲ - ۱ = ۰$$

۷ ـــ اسی طرح مساوات

$$لا^۴ + ۲۰ لا^۳ + ۱۴۳ لا^۲ + ۴۳۰ لا + ۴۶۲ = ۰$$

کو حل کرو۔

جواب:۔ اصلیں ہونگی ۔ ۲، ۔ ۳، ۔ ۵ ± $\sqrt{۳}$

۸ــــ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات ع ن = ۰ کی دوسری اور پانچویں رقمیں ایک ہی استحالہ سے خارج ہو سکیں۔

جواب:۔ $ا_۰^۳ ا_۴ - ۴ ا_۰^۲ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۰ ا_۱^۲ ا_۲ - ۳ ا_۱^۴ = ۰$

۳۶ــــ کعبی۔ دفعہ ما سبق کے استحالہ کے سلسلہ میں ہم اس دفعہ اور آیندہ دفعات میں تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساواتوں پر غور کرینگے کیونکہ ان کی بحث خاص اہمیت رکھتی ہے۔

مساوات

$$ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

میں لا کی بجائے ما + ھ درج کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$ا_۰ ما^۳ + ۳ \mathbf{ا}_۱ ما^۲ + ۳ \mathbf{ا}_۲ ما + \mathbf{ا}_۳ = ۰$$

جہاں $\mathbf{ا}_۱$، $\mathbf{ا}_۲$، $\mathbf{ا}_۳$ کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۳۵ میں بیان ہو چکی ہیں۔

اگر استحالہ شدہ مساوات میں دوسری رقم موجود نہ ہو تو

$$\mathbf{ا}_۱ = ۰، \quad یا \quad ھ = -\frac{ا_۱}{ا_۰}$$

$\mathbf{ا}_۲$ اور $\mathbf{ا}_۳$ میں ھ کی بجائے یہ قیمت درج کرنے سے دفعہ ۳۵ مثال ۲ کی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ (۲۔۲)

$$ا_۰ \mathbf{ا}_۲ = ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲، \quad ا_۰^۲ \mathbf{ا}_۳ = ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳$$

پس استحالہ شدہ کعبی بغیر دوسری رقم کے، حسب ذیل ہے

$$ما^۳ + \frac{۳}{ا_۰^۲}(ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲)\, ما + \frac{۱}{ا_۰^۳}(ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳) = ۰$$

سروں کے یہ تفاعل جبری مساواتوں کے نظریہ میں اسقدر اہمیت رکھتے ہیں کہ اِنکو واحد حروف سے تعبیر کرنے میں بڑی سہولت ہوگی۔ اسلئے ہم ترقیم

ا. ا۲ - ا۱^۲ ≡ ھ ، ا.^۲ ا۳ - ۳ ا. ا۱ ا۲ + ۲ ا۱^۳ ≡ گ

کو اختیار کرتے ہیں اور استحالہ شدہ مساوات کو شکل

ما^۳ + (۳ ھ / ا.^۲) ما + (گ / ا.^۳) = ۰ ، .... (۲)

میں لکھتے ہیں۔

اگر اس مساوات کی اصلوں کو ا. سے ضرب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جائیگی

ی^۳ + ۳ ھ ی + گ = ۰ ، .... (۳)

یہ شکل ایسی ہے جو کعبی کی بحث میں زیادہ سہولت پیدا کردیگی۔ اس مساوات کے پہلے رکن میں جو متغیری ہے وہ ا. ما یا ا. لا + ا۱ کے مساوی ہے۔

ابتدائی کعبی کو ا.^۲ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

(ا. لا + ا۱)^۳ + ۳ ھ (ا. لا + ا۱) + گ

کے مماثل ہو جاتا ہے جسکی تصدیق طالب علم بہ آسانی کرسکتا ہے۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو استحالہ شدہ مساوات (۲) کی اصلیں ہونگی

عہ + ا۱/ا. ، بہ + ا۱/ا. ، جہ + ا۱/ا.

اب چونکہ

عہ + بہ + جہ = - ۳ ا۱/ا.

اسلئے اِن اصلوں کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$\frac{1}{3}$ (۲عہ ـ بہ ـ جہ)، $\frac{1}{3}$ (۲بہ ـ جہ ـ عہ)، $\frac{1}{3}$ (۲جہ ـ عہ ـ بہ) (73)

استحالہ شدہ مساوات کے ذریعہ ہم ابتدائی کعبی کی اصلوں کے تشاکل تفاعلوں

(۲عہ ـ بہ ـ جہ) (۲بہ ـ جہ ـ عہ)، Σ

(۲عہ ـ بہ ـ جہ)(۲بہ ـ جہ ـ عہ)(۲جہ ـ عہ ـ بہ)

کی قیمتیں فوراً لکھ سکتے ہیں۔ موخرالذکر تفاعل کی قیمت دفعہ ۲۷ مثال ۱۵ میں محصلہ قیمت کے مماثل ہوگی۔

اس سلسلہ میں عام مساوات کے متعلق ہم ایک اہم اصول بیان کرینگے۔ وہ یہ ہے کہ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ کا کوئی تشاکل تفاعل جو صرف انکے فرقوں کا تفاعل ہو ان سروں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جو استحالہ شدہ مساوات میں جسمیں دوسری رقم موجود نہ ہو واقع ہوتے ہیں۔ یہ بات ظاہر ہے کیونکہ استحالہ شدہ مساوات کی کوئی دو اصلوں عہ، بہ کا فرق ابتدائی مساوات کی اصلوں عہ، بہ کے فرق کے مساوی ہے اور اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ کا کوئی تشاکل تفاعل استحالہ شدہ مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ نتیجۃً کعبی کی صورت میں اصلوں کے تمام تشاکل تفاعل جنمیں صرف اصلوں کے فرق داخل ہوں ا، ھ، گ کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔ اس اصول کی مثالیں دفعہ ۷۲ کی مثالوں میں ملینگی۔

۳۷ ـ چاردرجی ـ اس صورت میں استحالہ شدہ مساوات دوسری رقم کے بغیر حسب ذیل ہوگی

$$ا. ما^{۴} + ۶ ا_{۲} ما^{۲} + ۴ ا_{۳} ما + ا_{۴} = ۰$$

جہاں $ا_{۲}$ اور $ا_{۳}$ کی قیمتیں وہی ہیں جو دفعہ گذشتہ میں دی گئی ہیں اور جہاں $ا_{۴}$ مساوات

$$ا_۰^۳ ل_۴ = ا_۰^۳ ا_۴ - ۴ ا_۰^۲ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۰ ا_۱^۲ ا_۲ - ۳ ا_۱^۴$$

سے حاصل ہوگا۔
اس لئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$م^۴ + \frac{۶}{ا_۰^۲} ھ م^۲ + \frac{۴}{ا_۰^۳} گ م + \frac{۱}{ا_۰^۴} (ا_۰^۳ ا_۴ - ۴ ا_۰^۲ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۰ ا_۱^۲ ا_۲ - ۳ ا_۱^۴) = ۰$$

اگر ہم چاہیں تو اس مساوات کی رقم مطلق کو ھ اور گ کی طرح ایک حرف سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہمیں سروں کے تین تفاعل ملینگے جنکی رقوم میں چار درجی کی اصلوں کے فرقوں کے تمام متشاکل تفاعلوں کو بیان کیا جا سکتا ہے۔ لیکن اس رقم کو ھ اور سروں کے ایک دوسرے تفاعل سے ترکیب یافتہ سمجھنا زیادہ سہولت بخش ہے۔ اس دوسرے ترکیبی تفاعل کو طریقہ ذیل پر معلوم کیا جا سکتا ہے:۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$ا_۰^۳ ا_۴ - ۴ ا_۰^۲ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۰ ا_۱^۲ ا_۲ - ۳ ا_۱^۴ \equiv ا_۰^۲ (ا_۰ ا_۴ - ۴ ا_۱ ا_۳ + ۳ ا_۲^۲) - ۳ (ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲)^۲$$

ایک مسئلہ ہے۔
جس میں $ا_۰^۲$ ھ اور سروں کا دوسرا تفاعل یعنی

$$ا_۰ ا_۴ - ۴ ا_۱ ا_۳ + ۳ ا_۲^۲$$

شامل ہیں۔ یہ تفاعل چار درجی کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ اسکو اگر ہم ع سے تعبیر کریں تو

$$ا_۰^۳ ا_۴ - ۴ ا_۰^۲ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۰ ا_۱^۲ ا_۲ - ۳ ا_۱^۴ \equiv ا_۰^۲ ع - ۳ ھ^۲$$

اب استحالہ شدہ مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$م^۴ + \frac{۶ ھ}{ا_۰^۲} م^۲ + \frac{۴ گ}{ا_۰^۳} م + \frac{ا_۰^۲ ع - ۳ ھ^۲}{ا_۰^۴} = ۰ \quad ......(۱)$$

اس مساوات کی اصلوں کو $ا_{\cdot}$ سے ضرب دیا جائے جیسا کہ دفعہ ۳۶ کے کعبی کی صورت میں کیا گیا ہے تو

$$ی^{4} + 6\,ھ\,ی^{2} + 4\,گ\,ی + ا_{\cdot}^{2}\,ع - 3\,ھ^{2} = 0 \qquad (2)$$

چار درجی کا جبری حل دریافت کرنے میں اس کی یہ شکل آسانی پیدا کرتی ہے اس میں متغیر وہی ہے جو کعبی کی صورت میں تھا یعنی $ا_{\cdot}لا + ا_{1}$ کیونکہ ابتدائی چار درجی تفاعل کو $ا_{\cdot}^{3}$ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

$$(ا_{\cdot}لا + ا_{1})^{4} + 6ھ\,(ا_{\cdot}لا + ا_{1})^{2} + 4گ\,(ا_{\cdot}لا + ا_{1}) + ا_{\cdot}^{2}\,ع - 3ھ^{2}$$

کے مماثل ہوتا ہے۔

ابتدائی چار درجی مساوات کی اصلوں کے کسی تشاکل تفاعل کو جو صرف ان کے فرقوں سے بنا ہو $ا_{\cdot}$، ھ، گ اور ع کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو یہ بہ آسانی معلوم کیا جا سکتا ہے کہ استحالہ شدہ مساوات (۱) کی اصلیں ہیں

$\frac{1}{4}(3عہ - بہ - جہ - ضہ)$، $\frac{1}{4}(3بہ - جہ - ضہ - عہ)$، $\frac{1}{4}(3جہ - ضہ - عہ - بہ)$، $\frac{1}{4}(3ضہ - عہ - بہ - جہ)$

ان کا مجموعہ = ۰، انہیں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $= \frac{6ھ}{ا_{\cdot}^{2}}$، ان میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $= \frac{-4گ}{ا_{\cdot}^{3}}$، اور ان سب کے مسلسل حاصل ضرب کے لئے مساوات ہے

$$ا_{\cdot}^{4}(3عہ - بہ - جہ - ضہ)(3بہ - جہ - ضہ - عہ)(3جہ - ضہ - عہ - بہ)(3ضہ - عہ - بہ - جہ)$$
$$= 256\,(ا_{\cdot}^{2}\,ع - 3ھ^{2})$$

سروں کا ایک اور تفاعل ہے جو چار درجی کی بحث میں بہت اہمیت رکھتا ہے اور جسے ہم اب بیان کرینگے۔ یہ وہ تفاعل ہے جس کا ذکر دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ میں ہو چکا ہے یعنی

$ا_۱ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۱ ا_۳^۲ - ا_۲^۲ ا_۴ - ا_۲^۳$

اسکو ہم ج سے تعبیر کرینگے۔ جس مثال کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے۔ اس لئے اسے ا، ھ، گ اور ع کی رقوم میں بیان ہو جانا چاہیئے اور فی الحقیقت ہمیں متماثلہ ملتی ہے

$ا^۳ ج = ا^۲ ھ ع - گ^۲ - ۴ ھ^۳$

جسکی تصدیق طالب علم بہ آسانی کر سکتا ہے۔

یا اس ربط کو اس طریقہ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے:۔ جب سروں ا، ا، ا وغیرہ کا کوئی تفاعل اصلوں کے فرقوں کے تفاعل کی صورت میں بیان ہو سکے تو سروں کا ایسا تفاعل اُس استحالہ سے غیر متغیر رہیگا جو مساوات سے دوسری رقم کو خارج کر دیتا ہے۔ پس اسکی قیمت غیر متغیر رہتی ہے جب ہم $ا_۱$ کو صفر میں، $ا_۲$ کو $ا_۲$ میں، $ا_۳$ کو $ا_۳$ میں، وغیرہ بدلتے ہیں۔ پس

$ا_۱ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۱ ا_۳^۲ - ا_۲^۲ ا_۴ - ا_۲^۳ \equiv ا_۱ ا_۲ ا_۴ - ا_۱ ا_۳^۲ - ا_۲^۳$

اس میں $ا_۲$، $ا_۳$، $ا_۴$ کی بجائے انکی قیمتیں ھ، گ، ع کی رقوم میں درج کرنے سے ہم بہ آسانی متذکرہ بالا متماثلہ حاصل کر لیتے ہیں جس کو عام طور پر شکل

$گ^۲ + ۴ ھ^۳ \equiv ا^۲ (ھ ع - ا ج)$

میں لکھا جائیگا۔

۳۸ - ہم رسم (Homographic) استحالہ۔ کسی کثیر الارقام کا وہ استحالہ جس پر دفعہ ۳۳ میں غور کیا گیا ہے حسب ذیل استحالہ کی ایک خاص صورت ہے جسمیں لا نئے متغیر ما کے ساتھ ربط

$ما = \frac{ل لا + م}{ل' لا + م'}$

رکھتا ہے۔

اگر لہ = ا، مہ = ۔ ھ، لہَ = ۰، مہَ = ا تو ما = لا ۔ ھ جیسا کہ دفعہ ۳۲ میں فرض کیا گیا تھا۔ لا کو ما کی رقوم میں حل کریں تو

$$لا = \frac{مہ - مہَ ما}{لہَ ما - لہ}$$

(76) اس قیمت کو دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے درج کیا جا سکتا ہے اور اس طرح ما میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل کیجا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ ہیں اور انکے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں عہَ، بہَ، جہَ، وغیرہ ہیں تو مساواتوں

$$عہَ = \frac{لہ عہ + مہ}{لہَ عہ + مہَ}،\quad بہَ = \frac{لہ بہ + مہ}{لہَ بہ + مہَ}،\quad \text{وغیرہ}$$

سے ربط

$$عہَ - بہَ = \frac{(لہ مہَ - لہَ مہ)(عہ - بہ)}{(لہَ عہ + مہَ)(لہَ بہ + مہَ)}$$

بہ آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ علیٰ ہذا اصلوں کے کسی دوسرے زوج کیلئے۔ اگر ہم ابتدائی مساوات کی چار اصلیں اور ان کے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی چار اصلیں لیں تو ربط ملیگا

$$\frac{(عہَ - بہَ)(جہَ - ضہَ)}{(عہَ - جہَ)(بہَ - ضہَ)} = \frac{(عہ - بہ)(جہ - ضہ)}{(عہ - جہ)(بہ - ضہ)}$$

پس اگر مجوزہ مساوات کی اصلیں اُن فاصلوں کو تعبیر کریں جو ایک خط مستقیم پر کے چند نقطوں اور اسی خط پر کے ایک ثابت مبدا کے درمیان ہیں تو استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں نقطوں کے ایک متناظر نظام کے فاصلوں کو تعبیر کرینگی اور ان دونوں نظاموں میں یہ ربط ہوگا کہ ایک نظام کے کسی چار کی "غیر موسیقی نسبت" وہی ہوگی جو دوسرے نظام میں

انکے چار مزدوجوں کی ہے ۔ اسی خاصیت کی بناء پر ہم اس استحالہ کو ہم رسم استحالہ کہینگے ۔

یہ بات یاد رہے کہ زیر بحث استحالہ جس میں متغیروں لا اور ما میں

$$ ۱ لا ما + ب لا + ج ما + د = ۰ $$

کی شکل کا ربط ہے استحالہ کی عام سے عام شکل ہے جس سے کسی متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے ۔

۳۹ ۔ متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ استحالہ ۔ فرض کرو کہ ایک مساوات کو ایک دوسری مساوات میں تحویل کرنا مطلوب ہے جسکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے دئے ہوئے منطق تفاعل ہوں ۔ فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ، ....) ہے جہاں فہ میں تمام اصلیں داخل ہوسکتی ہیں یا اصلوں کی کوئی سی تعداد ۔ ہم اصلوں کے تمام ممکن اجتماع بہ طرز فہ (عہ بہ جہ)، فہ (عہ بہ ضہ) وغیرہ بناتے ہیں اور استحالہ شدہ مساوات کو شکل

(۶۶)

$$ \{ ما - فہ (عہ بہ جہ .....) \} \{ ما - فہ (عہ بہ ضہ ....) \} ...... = ۰ $$

میں لکھتے ہیں ۔

جب اس حاصل ضرب کو پھیلایا جاتا ہے تو ما کے متواتر سر دی ہوئی مساوات کی اصلوں عہ، بہ، جہ، وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے اس مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان ہوسکینگے ۔

مثالیں

۱ ـــ $ لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰ $

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں ۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $عہ^۲$، $بہ^۲$، $جہ^۲$ ہوں ۔

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ما}^3 + \text{ف}\,\text{ما}^2 + \text{ق}\,\text{ما} + \text{ر} = ۰$$

تب $-\text{ف} = \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2$، $\text{ق} = \Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2$، $-\text{ر} = \text{عہ}^2\,\text{بہ}^2\,\text{جہ}^2$

اب دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں $\Sigma\,\text{عہ}^2$، $\Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2$، $\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2\,\text{جہ}^2$ کو معلوم کرنا ہے۔ ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$\Sigma\,\text{عہ}^2 = \text{ف}^2 - ۲\text{ق}،\quad \Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2 = \text{ق}^2 - ۲\,\text{ف}\,\text{ر}،\quad \text{عہ}^2\,\text{بہ}^2\,\text{جہ}^2 = \text{ر}^2$$

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$\text{ما}^3 - (\text{ف}^2 - ۲\text{ق})\,\text{ما}^2 + (\text{ق}^2 - ۲\,\text{ف}\,\text{ر})\,\text{ما} - \text{ر}^2 = ۰$$

۲ — اسی صورت میں وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں عہ^3، بہ^3، جہ^3 ہوں۔

جواب:— $\text{ما}^3 + (\text{ف}^3 - ۳\,\text{ف}\,\text{ق} + ۳\text{ر})\,\text{ما}^2 + (\text{ق}^3 - ۳\,\text{ف}\,\text{ق}\,\text{ر} + ۳\text{ر}^2)\,\text{ما} + \text{ر}^3 = ۰$

۳ — اگر مساوات

$$\text{لا}^4 + \text{ف}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س} = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ایسی مساوات بناؤ جسکی اصلیں عہ^2، بہ^2، جہ^2، ضہ^2 ہوں۔

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ما}^4 + \text{ف}\,\text{ما}^3 + \text{ق}\,\text{ما}^2 + \text{ر}\,\text{ما} + \text{س} = ۰$$

تب $-\text{ف} = \Sigma\,\text{عہ}^2$، $\text{ق} = \Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2$، $-\text{ر} = \Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2\,\text{جہ}^2$،
$\text{س} = \text{عہ}^2\,\text{بہ}^2\,\text{جہ}^2\,\text{ضہ}^2$

دفعہ ۲۷ کی مثالوں ۸، ۷ سے مقابلہ کرو۔

جواب:— $\text{ما}^4 - (\text{ف}^2 - ۲\text{ق})\,\text{ما}^3 + (\text{ق}^2 - ۲\,\text{ف}\,\text{ر} + ۲\text{س})\,\text{ما}^2 - (\text{ر}^2 - ۲\,\text{ق}\,\text{س})\,\text{ما} + \text{س}^2 = ۰$

۴ ـــ اگر $ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲ + ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں لہ، مہ، نہ یعنی
بہ جہ + عہ ضہ، جہ عہ + بہ ضہ، عہ بہ + جہ ضہ
ہوں ــ دیکھو دفعہ ۲۷، مثال ۱۷ -

جواب:- $ما^۳ - \frac{۶ ا_۲}{ا_۰} ما^۲ + \frac{۴}{ا_۰^۲}(۴ ا_۱ ا_۳ - ا_۰ ا_۴) ما$

$- \frac{۸}{ا_۰^۳}(۲ ا_۰ ا_۳^۲ - ۳ ا_۰ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱^۲ ا_۴) = ۰$

۵ ـــ اگر مثال ۴ کے محصلہ کعبی کی اصلوں کو $\frac{۱}{۴}$ $ا_۰$ سے ضرب دیا جائے اور پھر دوسری رقم کو خارج کیا جائے تو ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$ی^۳ - ع ی + ۲ جے = ۰$

۴۰ ـــ وہ مساوات بنانا جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلونکی کوئی قوتیں ہوں -

گزشتہ دفعہ میں بیان کئے ہوئے متشاکل تفاعلوں کے طریقہ سے یہ استحالہ اکثر محنت طلب ہوتا ہے - اس سے زیادہ آسان طریقہ جسمیں صرف عمل ضرب کو دخل ہے استعمال کیا جاسکتا ہے - لیکن اس کا انحصار ثنائی مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کے حل کے علم پر ہے جسپر باب آئندہ میں بحث کیجائے گی - عام طریق عمل امثلہ ذیل کی مثالوں سے کافی طور پر واضح ہو جائیگا جہاں اس طریقہ کو دوسرے اور تیسرے درجہ کی مساواتوں پر استعمال کیا گیا ہے -

مثالیں

۱ ـــ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$لا^ن + ب_۱ لا^{ن-۱} + ب_۲ لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ب_{ن-۱} لا + ب_ن = ۰$

کی اصلوں کے مربع ہوں۔

اس استحالہ کو عمل میں لانے کے لئے متماثلہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}} \equiv (\text{لا}-\text{ع}_{۱})(\text{لا}-\text{ع}_{۲})\ldots(\text{لا}-\text{ع}_{\text{ن}})$$

میں لا کی بجائے -لا درج کرو تو ہمیں حاصل ہوگا (دفعہ ۳۰ کی طرح)

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \ldots\ldots \pm \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} \mp \text{ب}_{\text{ن}} = (\text{لا}+\text{ع}_{۱})(\text{لا}+\text{ع}_{۲})\ldots(\text{لا}+\text{ع}_{\text{ن}})$$

ضرب دینے سے

$$(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ب}_{۴}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \ldots)^{۲} - (\text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \ldots)^{۲}$$

$$\equiv (\text{لا}^{۲}-\text{ع}_{۱}^{۲})(\text{لا}^{۲}-\text{ع}_{۲}^{۲})\ldots\ldots(\text{لا}^{۲}-\text{ع}_{\text{ن}}^{۲})$$

یہ ظاہر ہے کہ اس متماثلہ کے پہلے رکن کو پھیلایا جائے تو پھیلاؤ میں لا کی صرف جفت قوتیں داخل ہونگی اس لئے ہم $\text{لا}^{۲}$ کی بجائے ما رکھ سکتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ما}^{\text{ن}} + (۲\text{ب}_{۲} - \text{ب}_{۱}^{۲})\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} + (\text{ب}_{۲}^{۲} - ۲\text{ب}_{۱}\text{ب}_{۳} + ۲\text{ب}_{۴})\,\text{ما}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots$$

$$\equiv (\text{ما}-\text{ع}_{۱}^{۲})(\text{ما}-\text{ع}_{۲}^{۲})\ldots\ldots(\text{ما}-\text{ع}_{\text{ن}}^{۲})$$

اسکے پہلے رکن کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات ملیگی۔

نوٹ:۔ اِس استحالہ کا فائدہ یہ ہے کہ ہم اکثر صورتوں میں دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد کی انتہا متعین کرسکینگے۔ کیونکہ ایک حقیقی اصل کا مربع ہمیشہ مثبت ہونا چاہئے اور اسلئے استحالہ شدہ مساوات کی جتنی اصلیں مثبت ہونگی انسے زیادہ دی ہوئی مساوات کی اصلیں حقیقی نہیں ہوسکتیں۔

۲ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۶ =$$

کی اصلوں کے مربع ہوں۔

جواب :- $ما^{۳} + ۱۵ ما^{۲} + ۵۲ ما - ۳۶ = ۰$

موخر الذکر مساوات میں ڈیکارٹ کے "قانون علامت" سے ایک سے زیادہ مثبت اصلیں نہیں ہو سکتیں اس لئے قبل الذکر کی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

(۷۹)

۳ ـــ وہ مساوات معلوم کرو جنکی اصلیں مساوات

$$لا^{۵} + لا^{۳} + لا^{۲} + ۲ لا + ۳ = ۰$$

کی اصلوں کے مُربع ہوں۔

جواب :- $ما^{۵} + ۲ ما^{۴} + ۵ ما^{۳} + ۳ ما^{۲} - ۲ ما - ۹ = ۰$

ڈیکارٹ کے قانون علامت سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی چار اصلیں خیالی ہونی چاہئیں۔

۴ ـــ مثال ۱ کے طریقہ سے دفعہ ۳۹ کی مثالوں ۱ اور ۲ کی تصدیق کرو۔

۵ ـــ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

یہ معلوم رہے کہ مثال ۱ کے عمل میں ہم نے دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کو ف (-لا) سے ضرب دیا ہے۔ اِن تفاعلوں میں جو متغیر ہیں وہ اس طرح حاصل کئے گئے ہیں کہ مساوات $لا^{۲} - ۱ = ۰$ کی دونوں اصلوں سے لا کو ضرب دیا گیا ہے۔ موجودہ صورت میں ہمیں ف (لا)، ف (سہ لا)، ف ($سہ^{۲}$ لا) کو باہم ضرب دینا چاہیئے۔ یہاں اِن تفاعلوں میں جو متغیر ہیں وہ مساوات $لا^{۳} - ۱ = ۰$ کی اصلوں سے لا کو ضرب دینے پر حاصل ہوتے ہیں۔ استحالہ کو ذیل کے طریقہ پر بہ آسانی عمل میں لایا جا سکتا ہے:-

کثیر الارقام ف (لا) کو شکل

$$(ب_{ن} + ب_{ن-۳} لا^{۳} + \ldots) + لا(ب_{ن-۱} + ب_{ن-۴} لا^{۳} + \ldots) + لا^{۲}(ب_{ن-۲} + ب_{ن-۵} لا^{۳} + \ldots)$$

میں لکھو جسکو ہم اختصاراً

ف + لا ق + لا^{۲} ر

سے تعبیر کرینگے جہاں ف، ق، ر سب کے سب لا^{۳} کے تفاعل ہیں۔

اب

ف + لا ق + لا^{۲} ر ≡ (لا − ع$_{۱}$)(لا − ع$_{۲}$).....(لا − ع$_{ن}$) (۱)

اس متماثلہ میں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے سہ لا اور سہ^{۲} لا رکھا جائے تو

ف + سہ لا ق + سہ^{۲} لا^{۲} ر ≡ (سہ لا − ع$_{۱}$)(سہ لا − ع$_{۲}$)...(سہ لا − ع$_{ن}$) (۲)

ف + سہ^{۲} لا ق + سہ لا^{۲} ر ≡ (سہ^{۲} لا − ع$_{۱}$)(سہ^{۲} لا − ع$_{۲}$)....(سہ^{۲} لا − ع$_{ن}$) (۳)

کیونکہ ف، ق، ر غیر متغیر رہتے ہیں اسوجہ سے کہ وہ لا^{۳} کے تفاعل ہیں۔

اب (۱)، (۲)، (۳) کو باہم ضرب دو اور دفعہ ۲۶ کے نتیجوں کو استعمال کرو تو

ف^{۳} + لا^{۳} ق^{۳} + لا^{۶} ر^{۳} − ۳ لا^{۳} ف ق ر ≡ (لا^{۳} − ع$_{۱}^{۳}$)(لا^{۳} − ع$_{۲}^{۳}$) ... (لا^{۳} − ع$_{ن}^{۳}$)

اس متماثلہ کے پہلے رکن میں لا کی قوتیں صرف ۳ کا ضعف ہیں اسلئے ہم لا^{۳} کی بجائے ما درج کرسکتے ہیں جس سے مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو جائیگی۔

۶۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں مساوات

لا^{۴} − لا^{۳} + ۲ لا^{۲} + ۳ لا + ۱ = ۰

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

جواب:- ما^{۴} + ۱۴ ما^{۳} + ۵۰ ما^{۲} + ۶ ما + ۱ = ۰

۷۔ مثال ۵ کے طریقہ سے دفعہ ۳۹ کی مثال ۲ کی تصدیق کرو۔

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

جواب:- ا^{۳} ما^{۳} + ۳ (ا^{۲} د + ۹ ب^{۳} − ۹ ا ب ج) ما^{۲}
+ ۳ (ا د^{۲} + ۹ ج^{۳} − ۹ ب ج د) ما + د^{۳} = ۰

۱۴ـــ **استحالہ کی عام صورت** ـــ استحالہ کے عام مسئلہ میں ہمیں ما میں ایک نئی مساوات بنانی ہوگی جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات ف(لا)=۰ کی اصلوں کے ساتھ ایک دیا ہوا ربط فہ(لا، ما)=۰ رکھیں۔ ایسی صورت میں استحالہ شدہ مساوات اس طرح حاصل ہوگی کہ دی ہوئی مساوات میں لا کی وہ قیمت ما کی رقوم میں درج کیجائے جو ربط فہ(لا، ما)=۰ سے حاصل ہو۔ یا بہ الفاظ دیگر دونوں مساواتوں ف(لا)=۰، اور فہ(لا، ما)=۰ سے لا ساقط کر دیا جائے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایسی مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں مساوات

لا۳ ـ ف لا۲ + ق لا ـ ر = ۰

کی اصلوں (عہ، بہ، جہ) میں سے دو دو اصلوں کے مجموعے ہوں۔ یہاں

ما = بہ + جہ = عہ + بہ + جہ ـ عہ = ف ـ عہ

مساوات فہ(لا، ما)=۰ اس صورت میں ما = ف ـ لا ہے کیونکہ جب لا قیمت عہ اختیار کرتا ہے تو ما مجوزہ قیمتوں میں سے ایک قیمت اختیار کرتا ہے اور جب لا دوسری قیمتیں بہ اور جہ اختیار کرتا ہے تو ما دوسری مجوزہ قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے ف ـ ما درج کرنے سے مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

مثالیں

۱ـــ اگر کبھی

لا۳ ـ ف لا۲ + ق لا ـ ر = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

بہ جہ + $\frac{۱}{عہ}$، جہ عہ + $\frac{۱}{بہ}$، عہ بہ + $\frac{۱}{جہ}$

یہاں

$$ما = به جه + \frac{1}{عه} = \frac{عه به جه + 1}{عه} = \frac{1 + ر}{عه}$$

یعنے دیا ہوا ربط لا ما = ۱ + ر ہے۔ اس لئے ف (لا) = ۰ میں لا کی بجائے $\frac{1+ر}{ما}$ درج کرنے سے استحالہ شدہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

جواب:- $ر ما^3 - ق(1+ر) ما^2 + ف(1+ر)^2 ما - (1+ر)^3 = 0$

۲ــــ اُسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

عه به + عه جه ، عه به + به جه ، به جه + عه جه

ہوں۔

لا کی بجائے $\frac{ر}{ق - ما}$ درج کرو۔

جواب:- $ما^3 - 2ق ما^2 + (ف ر + ق^2) ما + ر^2 - ف ق ر = 0$

(81) ۳ــــ اُسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{عه}{به + جه - عه} ، \frac{به}{جه + عه - به} ، \frac{جه}{عه + به - جه}$$

ہوں۔

لا کی بجائے $\frac{ف ما}{1 + 2 ما}$ درج کرو۔

جواب:- $(ف^3 - 4 ف ق + 8 ر) ما^3$
$+ (ف^3 - 4 ف ق + 12 ر) ما^2 + (6 ر - ف ق) ما + ر = 0$

۴ــــ اگر کعبی

$$ا لا^3 + 3 ب لا^2 + 3 ج لا + د = 0$$

کی اصلیں عه ، به ، جه ہوں تو ثابت کرو کہ ہم رسم استحالہ

$$ا لا ما + ب (لا + ما) + ج = 0$$

سے ما میں ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جسکی اصلیں

(بہ جہ − عہ²) / (بہ + جہ − ۲ عہ) ، (جہ عہ − بہ²) / (جہ + عہ − ۲ بہ) ، (عہ بہ − جہ²) / (عہ + بہ − ۲ جہ)

ہیں۔

۴۲ — کعبی کی مربع دار فرقوں کی مساوات

دفعہ ماسبق میں ہم نے جس استحالہ کا ذکر کیا ہے اس کو اب ہم ایک اہم مسئلہ پر یعنی اس مساوات کے بنانے میں استعمال کرینگے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

پہلے ہم کعبی

لا³ + ق لا + ر = ۰ .... (۱)

کے لئے جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے اس قسم کا عمل کرینگے اور ہم جانتے ہیں کہ عام مساوات کو شکل (۱) میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ اسکی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں۔ ما میں وہ مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں

(بہ − جہ)² ، (جہ − عہ)² ، (عہ − بہ)²

ہوں۔

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۳۹ کا طریقہ اس عام مسئلہ کو حل کرنے میں یعنی ایسی مساوات کے بنانے میں جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں استعمال کیا جا سکتا ہے کیونکہ جب حاصل ضرب

{ما − (عہ₁ − عہ₂)²}{ما − (عہ₁ − عہ₃)²} ...... {ما − (عہ₂ − عہ₃)²} ......

معلوم ہو جائے تو ما کی متواتر قوتوں کے سر عہ₁ ، عہ₂ ، عہ₃ ...... وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے سروں کی رقوم میں

(82) بیان ہو سکینگے - لیکن موجودہ مثال میں دفعہ ۴۱ کے طریقہ سے مطلوبہ مساوات زیادہ آسانی سے حاصل ہوتی ہے - اس مساوات کو ہم اختصاراً مجوزہ مساوات کی "مربع دار فرقوں کی مساوات" کہینگے - ما کو استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی رکھنے سے مثلاً ما = (بہ - جہ)^2 رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = (بہ - جہ)^2 = عہ^2 + بہ^2 + جہ^2 - عہ^2 - \frac{۲ عہ بہ جہ}{عہ}$$

لیکن $عہ^2 + بہ^2 + جہ^2 = - ۲ ق$ ، عہ بہ جہ = - ر

اسلئے دفعہ ۴۱ کی مساوات فہ (لا ، ما) = ۰ ہو جاتی ہے

$$ما = - ۲ ق - لا^2 + \frac{۲ ر}{لا}$$

یا

$$لا^3 + (ما + ۲ ق) لا - ۲ ر = ۰$$

دی ہوئی مساوات کو اس میں سے تفریق کیا جائے تو

$$(ما + ق) لا - ۳ ر = ۰ \quad \text{یعنی} \quad لا = \frac{۳ ر}{ما + ق}$$

پس ما میں استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$ما^3 + ۶ ق ما^2 + ۹ ق^2 ما + ۴ ق^3 + ۲۷ ر^2 = ۰ \quad .... (۲)$$

اگر وہ مساوات بنانا مطلوب ہو جسکی اصلیں کعبی

$$ا_۰ لا^3 - ۳ ا_۱ لا^2 + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰ \quad .... (۳)$$

کی اصلوں (عہ ، بہ ، جہ) میں سے دو دو کے فرقوں کے مربع ہوں تو ہم اول دوسری رقم کو خارج کرتے ہیں جس سے مساوات حاصل ہوگی

$$ما^3 + \frac{۳ ھ}{ا_۰^2} ما + \frac{گ}{ا_۰^3} = ۰$$

اور مطلوبہ مساوات وہی ہوگی جو اس مساوات کی مربع دار فرقوں کی مساوات ہے کیونکہ دوسری رقم کو خارج کرنے سے کسی دو اصلوں کا فرق غیر متبدل رہتا ہے۔ اس لئے موخرالذکر مساوات میں

$$\text{ق} = \frac{۳\,\text{ھ}}{\text{ا}^{۲}} \text{ ، } \text{ر} = \frac{\text{گ}}{\text{ا}^{۳}}$$

رکھنے سے ہم مطلوبہ مساوات حاصل کرسکتے ہیں۔ چنانچہ مطلوبہ مساوات ہے

(83

$$\text{لا}^{۳} + \frac{۱۸\,\text{ھ}}{\text{ا}^{۲}}\text{لا}^{۲} + \frac{۸۱\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ا}^{۴}}\text{لا} + \frac{۲۷}{\text{ا}^{۶}}(\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}) = ۰ \quad \text{.....(۴)}$$

جسکی اصلیں ہیں

$$(\text{ب} - \text{ج})^{۲} \text{ ، } (\text{ج} - \text{ع})^{۲} \text{ ، } (\text{ع} - \text{ب})^{۲}$$

مساوات (۴) سے کسروں کو دور کرنیکے لئے اس کی اصلوں کو $\text{ا}^{۲}$ سے ضرب دینا ہوگا جس سے یہ مساوات ہو جائیگی

$$\text{لا}^{۳} + ۱۸\,\text{ھ}\,\text{لا}^{۲} + ۸۱\,\text{ھ}^{۲}\,\text{لا} + ۲۷(\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}) = ۰ \quad \text{........(۵)}$$

جسکی اصلیں ہونگی

$$\text{ا}^{۲}(\text{ب} - \text{ج})^{۲} \text{ ، } \text{ا}^{۲}(\text{ج} - \text{ع})^{۲} \text{ ، } \text{ا}^{۲}(\text{ع} - \text{ب})^{۲}$$

اسکی مدد سے کعبی (۳) کی اصلوں کا ایک اہم تفاعل یعنی **فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب** سروں کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے:-

$$\text{ا}^{۶}(\text{ب} - \text{ج})^{۲}(\text{ج} - \text{ع})^{۲}(\text{ع} - \text{ب})^{۲} = -۲۷(\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}) \quad \text{......(۶)}$$

دفعہ ۳۷ کی تماثل سے یہ ظاہر ہے کہ $\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}$ کا ایک جزو ضربی

$ا_{۰}^{۲}$ ہے کیونکہ درحقیقت

$$گ^{۲} + ۴ ھ^{۳} \equiv ا_{۰}^{۲} \{ ا_{۰}^{۲} ا_{۳}^{۲} - ۶ ا_{۰} ا_{۱} ا_{۲} ا_{۳} + ۴ ا_{۰} ا_{۲}^{۳} + ۴ ا_{۱}^{۳} ا_{۳} - ۳ ا_{۱}^{۲} ا_{۲}^{۲} \}$$

خطوط واحدانی میں جو جملہ ہے اس کو ہم کعبی کا ممیز کہینگے اور Δ سے تعبیر کرینگے ۔ اس طرح

$$گ^{۲} + ۴ ھ^{۳} \equiv ا_{۰}^{۲} \Delta \text{ ، } ھ ع - اج \equiv \Delta$$

مثالیں

۱ ـــ کعبی

$$لا^{۳} - ۷ لا + ۶ = ۰$$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات بناؤ ۔

جواب :ـ $لا^{۳} - ۴۲ لا^{۲} + ۴۴۱ لا - ۴۰۰ = ۰$

۲ ـــ $لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۷ لا + ۲ = ۰$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات بناؤ ـــ

اول دوسری رقم خارج کرو ـــ

جواب :ـ $لا^{۳} - ۳۰ لا^{۲} + ۲۲۵ لا - ۶۸ = ۰$

۳ ـــ $لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۹ لا + ۴ = ۰$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات بناؤ ۔

جواب :ـــ $لا^{۳} - ۱۸ لا^{۲} + ۸۱ لا = ۰$

۴ ـــ مثال (۳) میں حاصل شدہ مساوات سے دئے ہوئے کعبی کی اصلوں کے متعلق کیا نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے ۔

(84) **۴۳ ـــ کعبی کی اصلوں کی نوعیت کی جانچ** ـــ دفعہ ۴۲ میں حاصل شدہ فرقوں کی مساوات کی شکل سے ہم سروں کی رقوم میں ایک ایسا جملہ معلوم کرسکتے ہیں جسکے ذریعہ جبری کعبی کی اصلوں کی نوعیت معلوم ہوسکیگی ۔ کیونکہ جب دفعہ ۴۲ کی

مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہو تو کعبی (۳) کی دو اصلیں خیالی ہونگی تاکہ انکے فرق کا مربع منفی ہو۔ اور جب مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہ ہو تو کعبی (۳) کی سب اصلیں حقیقی ہونگی کیونکہ (۳) کی خیالی اصلوں کے ایک زوج سے (۵) کی ایک منفی اصل کا وجود ہونا لازم آتا ہے۔

حسب ذیل صورتوں میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات کے سر حقیقی مقداریں ہیں۔ تب چار صورتیں پیدا ہوتی ہیں:۔

(۱) اگر $گ^{۲} + ۴ ھ^{۳}$ منفی ہو تو کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی۔ کیونکہ اسکو منفی بنانے کے لئے ھ کو منفی ہونا چاہئے (اور $۴ ھ^{۳} > گ^{۲}$) تب مساوات (۵) کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہونگی اور اسلئے (دفعہ ۲۰ سے) مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہیں ہوگی اور اسلئے دئے ہوئے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی۔

(۲) اگر $گ^{۲} + ۴ ھ^{۳}$ مثبت ہو تو کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ اس صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہونی چاہئے۔

(۳) اگر $گ^{۲} + ۴ ھ^{۳} = ۰$ تو کعبی کی دو اصلیں مساوی ہونگی کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل صفر کے مساوی ہوتی ہے۔ اس صورت میں $\Delta = ۰$۔ اور یہ مان لیا گیا ہے کہ ا معدوم نہیں ہوتا۔ اسلئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ممیز (دفعہ ۴۲) کا صفر ہونا وہ شرط ظاہر کرتا ہے جو مساوی اصلوں کے لئے ہے۔

(۴) اگر $گ = ۰$ اور $ھ = ۰$ تو کعبی کی تینوں اصلیں مساوی ہونگی۔ کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی سب اصلیں

سفر کے مساوی ہوتی ہیں۔ یہ مساواتیں شکل

$$\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1} = \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} = \frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_3}$$

میں بھی بہ آسانی بیان کیجا سکتی ہیں اور اسلئے سروں کے درمیان یہ روابط

وہ شرطیں ہیں کہ ک بھی ایک کامل مکعب ہو۔

۴۴ — عام صورت میں فرقوں کی مساوات۔ اب ہم تشاکل تفاعلوں کی مدد سے وہ مساوات بنانیکے عام مسئلہ پر غور کرینگے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے فرق، یا فرقوں کے مربع ہوں۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - \text{عم}_1)(\text{لا} - \text{عم}_2)\ldots\ldots(\text{لا} - \text{عم}_\text{ن}) = 0$$

85) ہے۔ اسمیں لا کی بجائے لا + $\text{عم}_\text{ر}$ درج کرنے اور ر کو یکے بعد دیگرے ۱، ۲، ۳، ....، ن قیمتیں دینے سے ہمیں مساواتیں ملینگی

$$\left.\begin{aligned}
\text{ف}(\text{لا}+\text{عم}_1) &\equiv \text{لا}(\text{لا}+\text{عم}_1-\text{عم}_2)(\text{لا}+\text{عم}_1-\text{عم}_3)\ldots\ldots(\text{لا}+\text{عم}_1-\text{عم}_\text{ن})\\
\text{ف}(\text{لا}+\text{عم}_2) &\equiv \text{لا}(\text{لا}+\text{عم}_2-\text{عم}_1)(\text{لا}+\text{عم}_2-\text{عم}_3)\ldots\ldots(\text{لا}+\text{عم}_2-\text{عم}_\text{ن})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{ف}(\text{لا}+\text{عم}_\text{ن}) &\equiv \text{لا}(\text{لا}+\text{عم}_\text{ن}-\text{عم}_1)(\text{لا}+\text{عم}_\text{ن}-\text{عم}_2)\ldots\ldots(\text{لا}+\text{عم}_\text{ن}-\text{عم}_{\text{ن}-1})
\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

نیز دفعہ ۶ کا پھیلاؤ استعمال کرنے سے اور $\text{ف}(\text{عم}_\text{ر}) = 0$ رکھنے سے ہمیں مساوات ملیگی

$$\frac{1}{\text{لا}}\text{ف}(\text{لا}+\text{عم}_\text{ر}) = \text{ف}'(\text{عم}_\text{ر}) + \frac{\text{لا}}{1\times2}\text{ف}''(\text{عم}_\text{ر}) + \frac{\text{لا}^2}{1\times2\times3}\text{ف}'''(\text{عم}_\text{ر}) + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

اس مساوات کی دوسری جانب کے جملہ کو فہ (لا، عہ) سے تعبیر کیا جائے اور مماثلات (۱) کو باہم ضرب دیا جائے تو

فہ (لا، عہ۱) فہ (لا، عہ۲) ...... فہ (لا، عہن)

$= \{ لا^2 - (عہ_1 - عہ_2)^2 \} \{ لا^2 - (عہ_1 - عہ_3)^2 \} ..... \{ لا^2 - (عہ_{ن-1} - عہ_ن)^2 \}$

اس لئے فرقوں کی مساوات بنانے کے لئے ہم ن اجزائے ضربی فہ (لا، عہ۱)، فہ (لا، عہ۲) وغیرہ کو باہم ضرب دے سکتے ہیں اور حاصل ضرب میں اصلوں کے جو متشاکل تفاعل واقع ہوتے ہیں انکی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ یا ہم دفعہ ۲۴ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب مماثلہ بالا کی بائیں جانب کے $\frac{1}{2}$ ن (ن - ۱) اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بالراست معلوم کر سکتے ہیں اور پھر متشاکل تفاعلوں کی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ لا میں ن (ن - ۱) ویں درجہ کی حاصل ہونے والی مساوات کی اصلوں میں سے دو دو اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہونگی۔ اب چونکہ اس مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں واقع ہوتی ہیں اس لئے $لا^2$ کی بجائے ما درج کیا جا سکتا ہے اور اس طرح $\frac{1}{2}$ ن (ن - ۱) ویں درجہ کی وہ مساوات حاصل ہو سکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

تیسرے درجہ سے اعلیٰ تر مساواتوں کے لئے فرقوں کی مساوات کا بنانا دشوار ہو جاتا ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں درجہ چہارم کی عام جبری مساوات کی صورت میں فرقوں کی مساوات معلوم کرینگے۔

مثالیں

(86)

۱۔ مساوات

$لا^3 - ۶ لا^2 + ۱۱ لا - ۶ = ۰$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ^{۲} + جہ^{۲} ، جہ^{۲} + عہ^{۲} ، عہ^{۲} + بہ^{۲}

ہوں ۔

جواب:- ما^{۳} − ۲۸ ما^{۲} + ۲۴۵ ما − ۶۵۰ = ۰

۲ ـــ کعبی

لا^{۳} + ۲ لا^{۲} + ۳ لا + ۱ = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں ۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$\frac{۱}{\text{بہ}^{۳}}$ + $\frac{۱}{\text{جہ}^{۳}}$ − $\frac{۱}{\text{عہ}^{۳}}$ ، $\frac{۱}{\text{جہ}^{۳}}$ + $\frac{۱}{\text{عہ}^{۳}}$ − $\frac{۱}{\text{بہ}^{۳}}$ ، $\frac{۱}{\text{عہ}^{۳}}$ + $\frac{۱}{\text{بہ}^{۳}}$ − $\frac{۱}{\text{جہ}^{۳}}$

ہوں ۔

جواب:- ما^{۳} + ۱۲ ما^{۲} − ۲۷۱ ما − ۲۰۶۲ = ۰

۳ ـــ کعبی

لا^{۳} + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں ۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ^{۲} + بہ جہ + جہ^{۲} ، جہ^{۲} + عہ جہ + عہ^{۲} ، عہ^{۲} + عہ بہ + بہ^{۲}

ہوں ۔

جواب:- (ما + ق)^{۳} = ۰

۴ ـــ کعبی

لا^{۳} + ف لا^{۲} + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں ۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ^{۲} + جہ^{۲} − عہ^{۲} ، جہ^{۲} + عہ^{۲} − بہ^{۲} ، عہ^{۲} + بہ^{۲} − جہ^{۲}

ہوں ۔

جواب:- ما^{۳} − (ف^{۲} − ۲ ق) ما^{۲} − (ف^{۴} − ۴ ف^{۲} ق + ۸ ف ر) ما
+ ف^{۶} − ۶ ف^{۴} ق + ۸ ف^{۳} ر + ۸ ف^{۲} ق^{۲} − ۱۶ ف ق ر + ۸ ر^{۲} = ۰

۵ ـــ اگر کعبی

لا^{۳} - ۳ (۱ + ل + ل^{۲}) لا + ۱ + ۳ ل + ۳ ل^{۲} + ۲ ل^{۳} = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)، ل کا ایک ناطق تفاعل ہے۔

جواب:- ± ۹ (۱ + ل + ل^{۲})

۶ـــ کعبی

ل$_{۰}$ لا^{۳} + ۳ ل$_{۱}$ لا^{۲} + ۳ ل$_{۲}$ لا + ل$_{۳}$ = ۰

کے گ اور ھ کے درمیان ربط معلوم کرو اگر اس کی اصلیں عہ، بہ، جہ ایسی ہوں کہ (بہ - جہ)^{۲}، (جہ - عہ)^{۲}، (عہ - بہ)^{۲} سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

جواب:- گ^{۲} + ۲ ھ^{۳} = ۰

۷ـــ اگر

ج^{۲} لا^{۴} - ۲ ج^{۲} لا^{۳} + ۲ لا - ۱ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو

(بہ^{۲} - جہ^{۲})^{۲} (عہ^{۲} - ضہ^{۲})^{۲} + (جہ^{۲} - عہ^{۲})^{۲} (بہ^{۲} - ضہ^{۲})^{۲} + (عہ^{۲} - بہ^{۲})^{۲} (جہ^{۲} - ضہ^{۲})^{۲}

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب:-** صفر

(87)

۸ـــ اگر

بہ جہ + جہ عہ + عہ بہ + عہ ضہ + بہ ضہ + جہ ضہ = ۰

تو ثابت کرو کہ

{(بہ - جہ)^{۲} (عہ - ضہ)^{۲} + (جہ - عہ)^{۲} (بہ - ضہ)^{۲} + (عہ - بہ)^{۲} (جہ - ضہ)^{۲}}^{۲}

= ۱۸ {(بہ^{۲} - جہ^{۲})^{۲} (عہ^{۲} - ضہ^{۲})^{۲} + (جہ^{۲} - عہ^{۲})^{۲} (بہ^{۲} - ضہ^{۲})^{۲} + (عہ^{۲} - بہ^{۲})^{۲} (جہ^{۲} - ضہ^{۲})^{۲}}

۹ـــ مساوات

لا^{۵} - لا^{۴} + ۸ لا^{۲} - ۹ لا - ۱۵ = ۰

کو حل کرو جس کی ایک اصل شکل ۱ + عہ $\sqrt{-۱}$ کی ہے۔

اصلوں کو بقدر ۱ کے گھٹاؤ۔ لا کی بجائے عہ $\sqrt{-۱}$ درج کرو۔ عہ کو

مساواتیں $عہ^4 - 3عہ^2 - 4 = 0$ اور $عہ^4 - 6عہ^2 + 8 = 0$ پوری کرنی چاہئیں۔ پس $عہ = \pm 2$
اس لئے ایک جزو ضربی $لا^2 - 2لا + 5$ ہے اور دوسرے اجزا $(لا + 1)$ اور $(لا^2 - 3)$ ہیں۔

۱۰ ــــ کعبی

$$ا_0 لا^3 + 3 ا_1 لا^2 + 3 ا_2 لا + ا_3 = 0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$بہ + جہ،\ جہ + عہ،\ عہ + بہ$$

ہوں۔

اس مساوات کو دفعہ ۱۴ میں حل کر دیا گیا ہے۔ ہم یہاں دوسرا حل درج کرتے ہیں جو اگرچہ کہ اس خاص مثال میں آسان ترین نہیں ہے لیکن بہت سی مثالوں میں کارآمد ثابت ہوگا۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات کی اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹایا گیا ہے تو استحالہ شدہ مساوات ہوگی (دفعہ ۳۵)

$$ا_0 ما^3 + 3 ا_1 ما^2 + 3 ا_2 ما + ا_3 = 0$$

جسکی اصلیں عہ ـ ھ، بہ ـ ھ، جہ ـ ھ ہیں۔ اب ہم وہ شرط معلوم کرینگے کہ اس مساوات کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہوں۔ یہ شرط ہے (دیکھو دفعہ ۴۴ مثال ۱۷)

$$9 ا_1 ا_2 - ا_0 ا_3 = 0$$

یہ مساوات ھ میں ایک کعبی ہے جس کی اصلیں

$$\tfrac{1}{2}(بہ + جہ)،\ \tfrac{1}{2}(جہ + عہ)،\ \tfrac{1}{2}(عہ + بہ)$$

ہیں کیونکہ شرط بالا ہے

$$(بہ - ھ) + (جہ - ھ) = 0$$

یعنی
$$2 ھ = بہ + جہ$$

جہاں بہ اور جہ سے دی ہوئی مساوات کی کوئی دو اصلیں تعبیر ہوتی ہیں۔ ھ کے لئے جو مساوات حاصل ہوئی ہے اس کی اصلوں کو ۲ سے ضرب دیکر مطلوبہ

کعبی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۔ چار درجی

$$ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲ + ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔ چھ درجی مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ + جہ، جہ + عہ، عہ + بہ، عہ + ضہ، بہ + ضہ، جہ + ضہ

ہوں۔

مثال ۱۰ کا طریقہ استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات دفعہ ۴۲ مثال ۲۰ کی شرط سے حاصل کیجا سکتی ہے۔

اس صورت میں شرط ہوگی

$$۶ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۱^۲ ا_۴ - ا_۰ ا_۳^۲ = ۰$$

یہ مساوات ھ میں چھ درجی ہے جس کی اصلیں $\frac{۱}{۲}$(بہ + جہ) وغیرہ ہیں جس سے مطلوبہ مساوات گزشتہ مثال کی طرح حاصل کیجا سکتی ہے۔

۱۲۔ مثال ۱۰ کے کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{بہ\,جہ - عہ^۲}{بہ + جہ - ۲عہ}،\quad \frac{جہ\,عہ - بہ^۲}{جہ + عہ - ۲بہ}،\quad \frac{عہ\,بہ - جہ^۲}{عہ + بہ - ۲جہ}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ حاصل ہونے والے کعبی کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں (دفعہ ۲۴ مثال ۱۸)۔ یہ شرط ہوگی

$$ا_۱^۳ ا_۳ - ا_۰ ا_۲^۳ = ۰$$

یہ مساوات ھ میں تیسرے درجہ کی مساوات میں تحویل ہوگی جس کی اصلیں مندرجہ بالا قیمتیں ہونگی کیونکہ

$$(عہ - ھ)^۲ = (بہ - ھ)(جہ - ھ) \quad یعنی \quad ھ = \frac{بہ\,جہ - عہ^۲}{بہ + جہ - ۲عہ}۔$$

۱۳ — اسی کعبی کی صورت میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{\text{۲ بہ جہ − عہ بہ − عہ جہ}}{\text{بہ + جہ − ۲ عہ}}،\quad \frac{\text{۲ جہ عہ − بہ جہ − بہ عہ}}{\text{جہ + عہ − ۲ بہ}}،\quad \frac{\text{۲ عہ بہ − جہ عہ − جہ بہ}}{\text{عہ + بہ − ۲ جہ}}$$

ہوں ۔

اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ استحالہ شدہ کعبی کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں (دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱۹) ۔

$$\frac{۲}{\text{عہ − ھ}} = \frac{۱}{\text{بہ − ھ}} + \frac{۱}{\text{جہ − ھ}}$$

یعنی

$$\text{ھ} = \frac{\text{۲ بہ جہ − عہ بہ − عہ جہ}}{\text{بہ + جہ − ۲ عہ}}$$

ھ میں مساوات ہے

$$ا_۰ ا_۳^۲ - ۳ ا_۱ ا_۲ ا_۳ + ۲ ا_۲^۳ = ۰$$

جو ایک کعبی میں تحویل ہو جائیگی ۔

۱۴ — چار درجی

$$ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲ + ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں ۔ وہ کعبی معلوم کرو جس کی اصلیں

$$\frac{\text{بہ جہ − عہ ضہ}}{\text{بہ + جہ − عہ − ضہ}}،\quad \frac{\text{جہ عہ − بہ ضہ}}{\text{جہ + عہ − بہ − ضہ}}،\quad \frac{\text{عہ بہ − جہ ضہ}}{\text{عہ + بہ − جہ − ضہ}}$$

ہوں ۔

اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹاؤ اور دفعہ ۲۴ مثال ۲ کی شرط استعمال کرو۔ اس صورت میں یہ شرط ہے

$$ا_۱^۲ ا_۴ - ا_۰ ا_۳^۲ = ۰$$

جس کو ایک کعبی میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس کی اصلیں مندرجہ بالا قیمتیں ہوں۔

۱۵۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں کعبی

لا^{۳} + ق لا + ر = ۰

کی اصلوں کی نسبتیں ہوں۔

عام مسئلہ کو عمل اسقاط کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ف (لا) = ۰ دی ہوئی مساوات ہے اور ی$_{۱}$ = به/عه = دو اصلوں کی نسبت۔ اب چونکہ ف (به) = ۰ اسلئے ف (ی$_{۱}$ عه) = ۰ اور نیز ف (عه) = ۰۔ اسلئے ی$_{۱}$ میں مطلوبہ مساوات اِن دو موخرالذکر مساواتوں سے عه کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی۔ موجودہ مثال کے کعبی کی صورت میں (89)

ر^{۲} (ی^{۲} + ی + ۱)^{۳} + ق^{۳} ی^{۲} (ی + ۱)^{۲} = ۰

۱۶۔ اگر

لا^{۳} + ف لا^{۲} + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عه، به، جه ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

به^{۲} + جه^{۲}، جه^{۲} + عه^{۲}، عه^{۲} + به^{۲}

ہوں۔

جواب:۔ لا^{۳} − ۲(ف^{۲} − ۲ق) لا^{۲} + (ف^{۴} − ۴ف^{۲}ق + ۵ق^{۲} − ۲ف ر) لا − (ف^{۲}ق^{۲} − ۲ف^{۳}ر + ۴ف ق ر − ۲ق^{۳} − ر^{۲}) = ۰

۱۷۔ اُسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

به/جه + جه/به، جه/عه + عه/جه، عه/به + به/عه

جواب:۔ ر^{۲}لا^{۳} − (ف ق ر − ۳ر^{۲}) + (ف^{۳}ر − ۵ف ق ر + ۳ر^{۲} + ق^{۳}) لا − (ف^{۲}ق^{۲} − ۲ف^{۳}ر + ۴ف ق ر − ۲ق^{۳} − ر^{۲}) = ۰

۱۸۔ اگر کعبی

لا^{۳} + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عه، به، جه ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

ل عہ + م بہ جہ ، ل بہ + م جہ عہ ، ل جہ + م عہ بہ

ہوں۔

جواب :۔ ما^{۳} − م ق ما^{۲} + (ل^{۲} ق + ۳ ل م ر) ما + ل^{۳} ر − ل^{۲} م ق^{۲} − ۲ ل م^{۲} ق ر − م^{۳} ر^{۲} = ۰

۱۹ — اگر کعبی

ل. لا^{۳} + ۳ ل$_{۱}$ لا^{۲} + ۳ ل$_{۲}$ لا + ل$_{۳}$ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

(عہ − بہ)(عہ − جہ)، (بہ − جہ)(بہ − عہ)، (جہ − عہ)(جہ − بہ)

ہوں۔ **جواب** :۔ ما^{۳} + (۹ ھ / ل.^{۲}) ما − ۲۷ (گ^{۲} + ۴ ھ^{۳}) / ل.^{۴} = ۰

۲۰ — مثال ۱۹ کے کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

(بہ − جہ)^{۲} (۲ عہ − بہ − جہ)^{۲}، (جہ − عہ)^{۲} (۲ بہ − جہ − عہ)^{۲}، (عہ − بہ)^{۲} (۲ جہ − عہ − بہ)^{۲}

ہوں۔

دفعہ ۲۴ کے کعبی (۴) کی مربع دار فرقوں کی مساوات بنانے سے مطلوبہ مساوات حاصل کیجا سکتی ہے کیونکہ

(جہ − عہ)^{۲} − (عہ − بہ)^{۲} = (بہ − جہ)(۲ عہ − بہ − جہ)

۲۱ — مثال ۱۶ کے کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

عہ (بہ − جہ)^{۲}، بہ (جہ − عہ)^{۲}، جہ (عہ − بہ)^{۲}

ہوں۔

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات لا^{۳} + فَ لا^{۲} + قَ لا + رَ = ۰ ہے۔

جواب :۔ فَ = ف ق − ۹ ر، قَ = ق^{۳} − ۹ ف ق ر + ۲۷ ر^{۲} + ۴ ف^{۳} ر، رَ = − ر (۴ ق^{۳} + ۲۷ ر^{۲} + ۴ ف^{۳} ر − ف^{۲} ق^{۲} − ۱۸ ف ق ر)

۲۲ — اسی کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

عہ^{۲} + ۲ بہ جہ، بہ^{۲} + ۲ جہ عہ، جہ^{۲} + ۲ عہ بہ

ہوں۔ **جواب** :۔ فَ = − ف^{۲}، قَ = ق (۲ ف^{۲} − ۳ ق)،

− رَ = ۴ ف^{۳} ر − ۱۸ ف ق ر + ۲ ق^{۳} + ۲۷ ر^{۲}

(90)

پانچواں باب

متکافی اور ثنائی مساواتونکا حل

۴۵ ـ متکافی مساواتیں ـ دفعہ [illegible] میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ تمام متکافی مساواتوں کو ایک معیاری شکل میں تحویل [illegible] جا سکتا ہے جسکا درجہ جفت ہو اور ابتدا اور آخر سے شمار کی ہوئی رقمیں مساوی اور [illegible] علامت ہوں ـ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ معیاری شکل کی متکافی مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں بدلا جا سکتا ہے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ کا نصف ہو۔

مساوات

$$ا_۰ لا^{۲م} + ا_۱ لا^{۲م-۱} + \dots\dots + ا_م لا^م + \dots . + ا_۱ لا + ا_۰ = ۰$$

پر غور کرو ـ اس کو $لا^م$ سے تقسیم کرکے ابتدا اور آخر سے متساوی الفصل رقموں کو ملانے سے

$$ا_۰ (لا^م + \frac{۱}{لا^م}) + ا_۱ (لا^{م-۱} + \frac{۱}{لا^{م-۱}}) + \dots + ا_{م-۱} (لا + \frac{۱}{لا}) + ا_م = ۰$$

فرض کرو کہ $لا + \frac{۱}{لا} = ی$ اور یہ کہ $لا^پ + \frac{۱}{لا^پ}$ اختصاراً $و_پ$ سے تعبیر ہوتا ہے تو صریحاً ربط حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}_{\text{پ}+1} = \text{و}_{\text{پ}}\,\text{ی} - \text{و}_{\text{پ}-1}$$

پ کو متواتر ۱، ۲، ۳، وغیرہ قیمتیں دینے سے

$$\text{و}_2 = \text{و}_1\,\text{ی} - \text{و}_0 = \text{ی}^2 - 2$$

$$\text{و}_3 = \text{و}_2\,\text{ی} - \text{و}_1 = \text{ی}^3 - 3\,\text{ی}$$

$$\text{و}_4 = \text{و}_3\,\text{ی} - \text{و}_2 = \text{ی}^4 - 4\,\text{ی}^2 + 2$$

$$\text{و}_5 = \text{و}_4\,\text{ی} - \text{و}_3 = \text{ی}^5 - 5\,\text{ی}^3 + 5\,\text{ی}$$

وغیرہ۔ ان قیمتوں کو مساوات بالا میں درج کرنے سے ی میں م ویں درجہ کی مساوات ملتی ہے اور ی کی قیمتوں سے لا کی قیمتیں درجہ دوم کی ایک مساوات حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثالیں

(91)

۱۔ مساوات

$$\text{لا}^5 + \text{لا}^4 + \text{لا}^3 + \text{لا}^2 + \text{لا} + 1 = 0$$

کی اصلیں معلوم کرو۔

لا + ۱ سے تقسیم کرو (دیکھو دفعہ ۳۲) تو

$$\text{لا}^4 + \text{لا}^2 + 1 = 0$$

اس مساوات کو شکل

$$\text{ی}^2 - 1 = 0$$

میں گھٹایا جا سکتا ہے جس سے ی = ± ۱ یعنی

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = 1 ،\quad \text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = -1$$

اور ان مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} ،\quad \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

۲ــ مساوات

$$\text{لا}^{۵} - ۳\,\text{لا}^{۴} + ۵\,\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} - ۱ = ۰$$

کی اصلیں معلوم کرو ــ

لا − ۱ سے تقسیم کرو جسکو اختصاراً یوں کیا جا سکتا ہے :ــ

۱	۳−	۵	۵−	۳	۱−
	۱	۲−	۳	۲−	۱
۱	۲−	۳	۲−	۱	۰

تو ہمیں منکافی مساوات ملتی ہے

$$\text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۱ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

یا

$$\left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right) - ۲\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right) + ۳ = ۰$$

$\text{و}_{۲}$ کی بجائے $\text{ی}^{۴} - ۴\,\text{ی}^{۲} + ۲$ اور $\text{و}_{۱}$ کی بجائے $\text{ی}^{۲} - ۲$ درج کرنے سے

$$\text{ی}^{۴} - ۶\,\text{ی}^{۲} + ۹ = ۰ \text{ یعنی } (\text{ی}^{۲} - ۳)^{۲} = ۰$$

جس سے $\text{ی}^{۲} = ۳$ اور $\text{ی} = \pm\sqrt{۳}$

یعنی $\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} = +\sqrt{۳}$ ، $\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} = -\sqrt{۳}$

اور ان مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۱}}{۲} \text{ ، } \frac{-\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۱}}{۲}$$

یہ اصلیں مساوات (۱) کی دوہری اصلیں ہیں ــ

۳ــ مساوات

$$\text{لا}^{۵} - ۱ = ۰$$

کو حل کرو ــ

اسکو لا − ۱ سے تقسیم کیا جائے تو

$$\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰$$

(92)

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$ی^{۲} + ی - ۱ = ۰$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$لا^{۲} + \tfrac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵})\, لا + ۱ = ۰$$

$$لا^{۲} + \tfrac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{۵})\, لا + ۱ = ۰$$

اور پھر اِن مساواتوں سے

$$لا = \tfrac{۱}{۴}\left\{-۱ + ط\sqrt{۵} \pm (۱۰ + ۲ط\sqrt{۵})^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{-۱}\right\}$$

جہاں $ط^{۲} = ۱$

اس جملہ سے لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔

۴ — $لا^{۶} + ۱ = ۰$

کے دو درجی اجزائے ضربی معلوم کرو۔

اس کو مستحیل کرنے سے

$$ی^{۳} - ۳ی = ۰$$

اس لئے $ی = ۰$ اور $ی = \pm\sqrt{۳}$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے دو درجی اجزائے ضربی ہیں

$$لا^{۲} + ۱ = ۰،\quad لا^{۲} \pm لا\sqrt{۳} + ۱ = ۰$$

۵ — مساواتوں

$$(۱)\ (۱ + لا)^{۴} = ا(۱ + لا^{۴})،\quad (۲)\ (۱ + لا)^{۵} = ا(۱ + لا^{۵})$$

کو حل کرو۔

۶ — $$\frac{(۱ + لا)^{۵}}{۱ + لا^{۵}} + \frac{(۱ - لا)^{۵}}{۱ - لا^{۵}} = ۲ا$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جو ی میں چوتھے درجہ کی ہو۔

جواب :— $(۱ - ا)ی^{۴} + (۷ + ۳ا)ی^{۲} - (۴ + ا) = ۰$

۴۶ ـ ثنائی مساواتیں ـ عام خواص۔

ثنائی مساواتوں کے اہم خواص اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں ثابت کئے جائینگے۔

مسئلہ ۱:- اگر $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک خیالی اصل عہ ہو تو $عہ^{م}$ بھی ایک اصل ہوگی جہاں م کوئی صحیح عدد ہے۔

چونکہ عہ ایک اصل ہے اسلئے

$$عہ^{ن} = ۱ \quad \text{اور اسلئے} \quad (عہ^{ن})^{م} = ۱ \quad \text{یعنی} \quad (عہ^{م})^{ن} = ۱$$

یعنی $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل $عہ^{م}$ ہے۔

یہ بات مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ م طاق عدد ہو۔

۴۷ ـ اگر صحیح عدد م اور ن ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو مساواتوں $لا^{م} - ۱ = ۰$، $لا^{ن} - ۱ = ۰$ میں کوئی اصل سوائے اکائی کے مشترک نہیں ہو سکتی۔

(93

اس کو ثابت کرنیکے لئے ہم صحیح عددوں کی حسب ذیل خاصیت استعمال کرتے ہیں:-

اگر صحیح عدد م اور ن ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو صحیح عدد ا اور ب معلوم کئے جا سکتے ہیں ایسے کہ $م ب - ن ا = \pm ۱$۔

کیونکہ فی الحقیقت جب $\frac{م}{ن}$ کو ایک کسر مسلسل کی شکل میں لکھا جاتا ہے تو $\frac{ا}{ب}$ وہ

تقرب ہے جو کسر $\frac{م}{ن}$ کے تقربوں میں ماقبل آخر واقع ہوتا ہے۔

اب اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ دی ہوئی مساواتوں کی کوئی مشترک اصل عہ ہے۔ تب

$$عہ^{م} = ۱ \quad اور \quad عہ^{ن} = ۱$$

اسلئے
$$عہ^{م ب} = ۱ \quad اور \quad عہ^{ن ا} = ۱$$

جس سے
$$عہ^{(م ب - ن ا)} = ۱ \quad یعنے \quad عہ^{\pm ۱} = ۱ \quad یا \quad عہ = ۱$$

یعنے دی ہوئی مساواتوں کی مشترک اصل صرف ۱ ہے۔

۴۸ ـ مسئلہ ۳ ـ اگر دو صحیح عددوں م اور ن کا مقسوم علیہ اعظم ک ہو تو مساواتوں $لا^{م} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کے درمیان مشترک اصلیں مساوات $لا^{ک} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہونگی۔

اس کو ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ

$$م = ک مَ ، \quad ن = ک نَ$$

اب چونکہ مَ اور نَ ایسے عدد ہیں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں اسلئے ایسے صحیح عدد ب اور ا معلوم کئے جا سکتے ہیں کہ

$$مَ ب - نَ ا = \pm ۱$$

پس
$$م ب - ن ا = \pm ک$$

اسلئے اگر $لا^{م} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک مشترک اصل عہ ہو تو

$$عہ^{(م ب - ن ا)} = ۱ \quad یعنے \quad عہ^{ک} = ۱$$

جس کے یہ معنی ہیں کہ مساوات $لا^{ک} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل عہ ہے۔

۴۹ — مسئلہ ۴۔ اگر ن ایک مفرد عدد ہو اور لا^ن − ۱ = ۰ کی کوئی خیالی اصل عہ ہو تو تمام اصلیں سلسلہ

۱، عہ، عہ^۲، ...... عہ^(ن−۱)

میں شامل ہیں۔

کیونکہ مسئلہ (۱) سے یہ تمام مقداریں دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں اور یہ سب مختلف بھی ہیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی ہیں یعنے عہ^ف = عہ^ق تو

عہ^(ف − ق) = ۱

لیکن مسئلہ ۲ سے یہ ناممکن ہے کیونکہ ن بالضرور (ف − ق) کے لحاظ سے جو ن سے کم ہے مفرد ہے۔

۵۰ — مسئلہ ۵ — اگر صحیح عدد ن کے اجزائے ضربی ف، ق، ر وغیرہ صحیح عدد ہوں تو مساواتوں لا^ف − ۱ = ۰، لا^ق − ۱ = ۰، لا^ر − ۱ = ۰ وغیرہ کی اصلیں مساوات لا^ن − ۱ = ۰ کو پورا کرینگی۔ (94)

مساوات لا^ف − ۱ = ۰ کی ایک اصل عہ پر غور کرو تو عہ^ف = ۱ جس سے

(عہ^ف)^(ق ر ....) = ۱ یعنی عہ^ن − ۱ = ۰

اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔

۵۱ — مسئلہ ۶ — اگر عدد مرکب ن کے اجزائے ضربی ف، ق، ر وغیرہ مفرد عدد ہوں تو مساوات لا^ن − ۱ = ۰ کی اصلیں حاصل ضرب

(۱ + عہ + عہ^۲ + ... + عہ^(ف−۱)) (۱ + بہ + بہ^۲ + ... + بہ^(ق−۱)) (۱ + جہ + جہ^۲ + ... + جہ^(ر−۱)) ....

کی ن رقمیں ہونگی جہاں $لا^{ف} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل عہ ہے، $لا^{ق} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل بہ، وغیرہ۔

ہم اسکو تین اجزائے ضربی ف، ق، ر کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ عام صورت میں اسی قسم کا ثبوت دیا جا سکتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ حاصل ضرب کی کوئی رقم مثلاً $عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج}$ مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے کیونکہ $عہ^{ان} = ۱$، $بہ^{بن} = ۱$، $جہ^{جن} = ۱$ اور اسلئے $(عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج})^{ن} = ۱$۔ اسکے علاوہ حاصل ضرب کی کوئی دو رقمیں مساوی نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج}$ کا دوسری رقم $عہ^{اَ} بہ^{بَ} جہ^{جَ}$ کے مساوی ہے تو $عہ^{اَ - ا} = بہ^{ب - بَ} جہ^{ج - جَ}$۔

اس مساوات کا پہلا رکن مساوات $لا^{ف} - ۱ = ۰$ کی اصل ہے اور دوسرا رکن مساوات $لا^{قر} - ۱ = ۰$ کی اصل ہے۔ اب ان دو مساواتوں میں کوئی اصل مشترک نہیں ہو سکتی کیونکہ ف اور قر ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں (مسئلہ ۲)۔ پس $عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج}$، $عہ^{اَ} بہ^{بَ} جہ^{جَ}$ کے مساوی نہیں ہو سکتا۔

۵۲ — مسئلہ۔ اگر $ن = ف^{ا} ق^{ب} ر^{ج}$ اور ن کے مفرد اجزائے ضربی ف، ق، ر ہوں تو مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی اصلیں شکل عہ بہ جہ کے مشابہ ن حاصل ضربوں کے مساوی ہونگی جہاں $لا^{ف^{ا}} = ۱$ کی ایک اصل عہ ہے، $لا^{ق^{ب}} = ۱$ کی ایک اصل بہ، $لا^{ر^{ج}} = ۱$ کی ایک اصل جہ۔

یہ مسئلہ مسئلہ ۶ کی توسیع ہے جسمیں ن کے مفرد اجزا ایک سے زیادہ مرتبہ ن میں واقع ہوتے ہیں۔ اس کا ثبوت بالا کے بالکل مشابہ

ہے۔ چنانچہ عہ بہ جہ جیسا کوئی حاصل ضرب ایک اصل کے مساوی ہوگا کیونکہ عہ^ن = ۱، بہ^ن = ۱، جہ^ن = ۱ اور ف، ق، ر کا ایک ضعف ن ہے دفعہ ۵۱ کے مماثل ثبوت سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اس قسم کے کوئی دو حاصلضرب مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ ف^ل، ق^ب، ر^ج ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔ سہولت کی خاطر ہم نے اس مسئلہ کو ن کے صرف تین اجزائے ضربی کے لئے بیان کیا ہے۔ عام صورت میں بالکل اسی قسم کا ثبوت دیا جا سکتا ہے۔

اس مسئلہ اور گزشتہ مسئلوں کی مدد سے اب ہم حسب ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-

(۵) اکائی کے ن ویں جذروں کو متعین کرنیکا سوال اُس صورت میں تحویل ہوتا ہے جسمیں ن مفرد عدد ہو یا مفرد عدد کسی قوت پر اٹھایا ہوا۔

۵۳ — لا^ن - ۱ = ۰ کی خاص اصلیں — شکل لا^ن - ۱ = ۰ کی ہر مساوات کی چند ایسی اصلیں ہوتی ہیں جو اسی شکل کی مگر کمتر درجہ کی مساوات کی اصلیں نہیں ہوتیں۔ اس قسم کی اصلوں کو ہم اس مساوات کی خاص اصلیں یا اکائی کے خاص ن ویں جذر کہیں گے۔ اگر ن مفرد عدد ہو تو تمام خیالی اصلیں اس قسم کی اصلیں ہونگی۔ اگر ن = ف^ل جہاں ف مفرد عدد ہے تو ن سے کمتر درجہ کی کوئی ن ویں اصل مساوات لا^(ف^(ل-۱)) - ۱ = ۰ کی اصل ہونی چاہئے۔ کیونکہ ف^ل کا کوئی مقسوم علیہ ف^(ل-۱) کا بھی مقسوم علیہ ہے (سوائے خود ن کے)۔ پس ف^ل (۱ - ۱/ف) اصلیں ایسی ہونگی جو ن سے کمتر درجہ کی کسی مساوات کی اصلیں نہیں ہونگی یعنے خاص اصلوں کی تعداد

$ف^{ل} (۱ - \frac{۱}{ف})$ ہے - پھر اگر $ن = ف^{ل} ق^{ب}$ جہاں ف اور ق ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں تو $ف^{ل} (۱ - \frac{۱}{ف})$ اور $ق^{ب} (۱ - \frac{۱}{ق})$ اصلیں علی الترتیب مساواتوں $لا^{ف^{ل}} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ق^{ب}} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلیں ہونگی - اب اگر ان مساواتوں کی کوئی دو خاص اصلیں عہ اور بہ ہوں تو مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک خاص اصل عہ بہ ہوگی کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو فرض کرو کہ $(عہ\ بہ)^{م} = ۱$ جہاں $م < ن$ - پس $عہ^{م} = بہ^{-م}$ لیکن $عہ^{م}$ مساوات $لا^{ف^{ل}} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے اور $بہ^{-م}$ مساوات $لا^{ق^{ب}} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے - مگر ان مساواتوں میں سوائے اکائی کے کوئی اصل مشترک نہیں ہو سکتی کیونکہ ان کے درجے ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں - اس لئے یہ نتیجہ نکلا کہ م، ن سے چھوٹا نہیں ہو سکتا اور عہ بہ مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی خاص اصل ہے - نیز چونکہ ایسے حاصل ضرب کی تعداد

$$ف^{ل} (۱ - \frac{۱}{ف}) ق^{ب} (۱ - \frac{۱}{ق}) \quad یعنی \quad ن (۱ - \frac{۱}{ف})(۱ - \frac{۱}{ق})$$

ہے اسلئے اتنی ہی تعداد خاص ن ویں اصلوں کی ہوگی - اس ثبوت کو بغیر مشکل کے ن کی کسی شکل پر منطبق کیا جا سکتا ہے -

$لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی سب اصلیں سلسلہ $۱، عہ، عہ^{۲}، عہ^{۳}، \ldots\ldots عہ^{ن-۱}$ میں شامل ہیں جہاں عہ کوئی خاص ن ویں اصل ہے - کیونکہ یہ بات ظاہر ہے کہ $عہ، عہ^{۲}$ وغیرہ اصلیں ہیں - نیز ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی نہیں کیونکہ اگر $عہ^{ف} = عہ^{ق}$ تو $عہ^{ف-ق} = ۱$ اور اسلئے عہ خاص اصل نہیں ہے اس وجہ سے کہ ف - ق، ن سے چھوٹا ہے -

اگر ایک خاص ن وال جذر عہ دیا جائے تو ہم اکائی کے باقی تمام خاص ن ویں جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

(96) چونکہ عہ خاص جذر ہے اسلئے ۱، عہ، $\text{عہ}^{۲}$، ..... $\text{عہ}^{\text{ن}-۱}$ مختلف ن ویں جذر ہیں جیسا کہ ہم نے ابھی ثابت کیا۔ اب اگر اسی سلسلہ کا ایک جذر $\text{عہ}^{\text{ف}}$ لیا جائے جہاں ف، ن کے لحاظ سے مفرد ہے تو جذر

$$\text{عہ}^{\text{ف}}،\ \text{عہ}^{۲\text{ف}}،\ .....\ ،\ \text{عہ}^{(\text{ن}-۱)\text{ف}}،\ \text{عہ}^{\text{ن ف}}(=۱)$$

سب مختلف ہیں کیونکہ عہ کی قوتوں کو جب ن سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہر صورت میں باقی مختلف ہوتے ہیں یعنی عددوں کا سلسلہ ۰، ۱، ۲، ۳، .... ن-۱ کسی ترتیب میں۔ پس جذر ن کا یہ سلسلہ وہی ہے جو قبل ازیں لکھا جا چکا ہے سوائے اسکے کہ یہاں رکنیں دوسری ترتیب میں واقع ہوئی ہیں۔ ہر عدد ف کے جواب میں جو ن کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹا ہو اکائی کا ایک خاص ن وال جذر ہے کیونکہ $\text{عہ}^{\text{م ف}}$ ایک کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ م، ن سے چھوٹا ہو۔ اگر ایسا ہو سکتا تو سلسلہ میں دو اصلیں ایک کے مساوی ہوتیں اور ایسی صورت میں سلسلہ سے تمام اصلیں حاصل نہ ہو سکتیں اسلئے کسی ثنائی مساوات کی جس کا درجہ ن سے کم ہو $\text{عہ}^{\text{ف}}$ اصل نہیں ہو سکتی یعنی $\text{عہ}^{\text{ف}}$ اکائی کا خاص ن وال جذر ہے۔ یہ بات متذکرہ بالا ثابت شدہ نتیجہ کے مطابق ہے کیونکہ ن سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد صحیح عددوں کی تعداد عددوں کی ایک معلومہ خاصیت سے ن $(۱-\frac{۱}{\text{پ}})(۱-\frac{۱}{\text{ق}})$ ہے جبکہ ن = $\text{پ}^{\text{ا}}\,\text{ق}^{\text{ب}}$ اور اتنی ہی تعداد مساوات $\text{لا}^{\text{ن}}-۱=۰$ کی خاص اصلوں کی ہے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا۔

مثالیں

۱ — $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلیں متعین کرو۔

یہاں $۶ = ۲ \times ۳$، اسلئے مساواتوں $لا^{۲} - ۱ = ۰$، $لا^{۳} - ۱ = ۰$ کی اصلیں مساوات $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔ اب $لا^{۶} - ۱$ کو $لا^{۳} - ۱$ سے تقسیم کرنے سے $لا^{۳} + ۱$ حاصل ہوتا ہے اور $لا^{۳} + ۱$ کو $\frac{لا^{۲} - ۱}{لا - ۱}$ یعنی $لا + ۱$ سے تقسیم کرنے سے $لا^{۲} - لا + ۱$ حاصل ہوتا ہے۔ اسلئے $لا^{۲} - لا + ۱ = ۰$ سے $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلیں متعین ہونگی۔

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$ع = \frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲} ، \quad ع_{۱} = \frac{۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$$

نیز چونکہ $ع ع_{۱} = ۱ = ع^{۶}$

اس لئے $ع_{۱} = ع^{۵}$

جسکی تصدیق بہ آسانی ہوسکتی ہے۔

اس لئے خاص اصلیں ہیں

$ع ، ع^{۵}$ یا $ع^{۵} ، ع_{۱}$ یا $ع ، \frac{۱}{ع}$

۲ — $لا^{۱۲} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلوں پر بحث کرو۔

97)

چونکہ ۱۲ کے مفرد اجزائے ضربی ۲ اور ۳ ہیں اور $\frac{۱۲}{۲} = ۶$، $\frac{۱۲}{۳} = ۴$

اسلئے $لا^{۶} - ۱ = ۰$، اور $لا^{۴} - ۱ = ۰$ کی اصلیں $لا^{۱۲} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔ اب $لا^{۱۲} - ۱$ کو $لا^{۶} - ۱$ اور $لا^{۴} - ۱$ سے تقسیم کیا جائے اور خارج قسمتوں کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں دو مساواتیں $لا^{۸} + لا^{۴} + ۱ = ۰$ اور $لا^{۶} + ۱ = ۰$ حاصل ہونگی اور یہ دونوں مساواتیں $لا^{۱۲} - ۱ = ۰$ کی اصلوں سے پوری ہونی چاہئیں۔ اس لئے $لا^{۸} + لا^{۴} + ۱$ اور $لا^{۶} + ۱$ کا مقسوم علیہ اعظم لیکر اس کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساوات $لا^{۴} - لا^{۲} + ۱ = ۰$ کی اصلیں خاص اصلیں ہونگی۔

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم $لا^{۴} - ۱$ اور $لا^{۶} - ۱$ کے ذو اضعاف اقل سے $لا^{۱۲} - ۱$ کو

تقسیم کرتے۔ اب متکافی مساوات لا^{۴} – لا^{۲} + ۱ = ۰ کو حل کرنے سے لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ = ± $\sqrt{۳}$، پس

(عہ، $\frac{۱}{\text{عہ}}$) = $\frac{\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۱}}{۲}$ ، (عہ$_{۱}$، $\frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}$) = $\frac{-\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۱}}{۲}$

مساوات لا^{۱۲} – ۱ = ۰ کی چار خاص اصلیں ہیں جہاں عہ اور عہ$_{۱}$ دو خاص اصلیں ہیں۔

اب ہم ان چار خاص اصلوں کو ان میں سے کسی ایک اصل عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔

چونکہ عہ + $\frac{۱}{\text{عہ}}$ + عہ$_{۱}$ + $\frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}$ = ۰ یعنی (عہ + عہ$_{۱}$) (۱ + $\frac{۱}{\text{عہ عہ}_{۱}}$) = ۰

اس لئے ہم عہ عہ$_{۱}$ = –۱ لیتے ہیں (جو عہ اور عہ$_{۱}$ کی قیمتوں کے مطابق ہے)

اور چونکہ لا^{۶} + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ اور عہ$_{۱}$ ہیں اسلئے عہ^{۶} = –۱ اور عہ^{۵} = – $\frac{۱}{\text{عہ}}$ = عہ$_{۱}$۔

یعنے اصلیں عہ، عہ$_{۱}$، $\frac{۱}{\text{عہ}_{۱}}$، $\frac{۱}{\text{عہ}}$ سلسلہ عہ، عہ^{۵}، عہ^{۷}، عہ^{۱۱} سے بیان ہوسکتی ہیں کیونکہ عہ^{۱۲} = ۱۔

نیز عہ کی بجائے عہ^{۵}، عہ^{۷}، عہ^{۱۱} رکھنے اور عہ کے قوت نماؤں سے ۱۲ کے ضعفوں کو خارج کرنے سے ہمیں حسب ذیل سلسلے بشمول سلسلہ بالا ملینگے

عہ ، عہ^{۵} ، عہ^{۷} ، عہ^{۱۱}

عہ^{۵} ، عہ ، عہ^{۱۱} ، عہ^{۷}

عہ^{۷} ، عہ^{۱۱} ، عہ ، عہ^{۵}

عہ^{۱۱} ، عہ^{۷} ، عہ^{۵} ، عہ

جہاں ہر صف اور ہر قطار میں وہی اصلیں تکرار پاتی ہیں، صرف انکی ترتیب بدلی ہوئی ہے اس لئے ہم نے یہ ثابت کردیا کہ یہ خاصیت چار اصلوں میں سے کسی ایک اصل سے مخصوص نہیں اور یہ ظاہر ہے کہ ۱، ۵، ۷، ۱۱ ایسے عدد ہیں جو ۱۲ کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹے ہیں اور یہ بات اُس عام نتیجہ کے مطابق ہے جس کو ہم نے

اس باب میں ثابت کیا ہے۔ $\text{لا}^{12} - 1 = 0$ کی سب اصلیں اسکی چار خاص اصلوں عہ، عہ^{5}، عہ^{7}، عہ^{11} میں سے کسی ایک کی قوتوں سے حسب ذیل حاصل ہوسکتی ہیں:-

عہ، عہ^{2}، عہ^{3}، عہ^{4}، عہ^{5}، عہ^{6}، عہ^{7}، عہ^{8}، عہ^{9}، عہ^{10}، عہ^{11}، ۱

عہ^{5}، عہ^{10}، عہ^{3}، عہ^{8}، عہ، عہ^{6}، عہ^{11}، عہ^{4}، عہ^{9}، عہ^{2}، عہ^{7}، ۱

عہ^{7}، عہ^{2}، عہ^{9}، عہ^{4}، عہ^{11}، عہ^{6}، عہ، عہ^{8}، عہ^{3}، عہ^{10}، عہ^{5}، ۱

عہ^{11}، عہ^{10}، عہ^{9}، عہ^{8}، عہ^{7}، عہ^{6}، عہ^{5}، عہ^{4}، عہ^{3}، عہ^{2}، عہ، ۱

۳ — ثابت کرو کہ $\text{لا}^{15} - 1 = 0$ کی خاص اصلیں مساوات

(98)

$$\text{لا}^{8} - \text{لا}^{7} + \text{لا}^{5} - \text{لا}^{4} + \text{لا}^{3} - \text{لا} + 1 = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

۴ — ثابت کرو کہ مثال ماسبق کی آٹھ اصلیں مساوات $\text{لا}^{2} + \text{لا} + 1 = 0$ کی دو اصلوں کو مساوات

$$\text{لا}^{4} + \text{لا}^{3} + \text{لا}^{2} + \text{لا} + 1 = 0$$

کی چار اصلوں سے ضرب دینے سے حاصل ہوسکتی ہیں۔

۵ — بارہویں درجہ کی مساوات بناؤ جس کی اصلیں $\text{لا}^{21} - 1 = 0$ کی خاص اصلیں ہوں اور اسکو چھٹے درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

جواب:- $\text{لا}^{6} - \text{لا}^{5} - 6\,\text{لا}^{4} + 6\,\text{لا}^{3} + 8\,\text{لا}^{2} - 8\,\text{لا} + 1 = 0$

۵۴ — ثنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا۔

ہم عام سے عام ثنائی مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$$

لیتے ہیں جہاں ا اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{ر}\ \text{جم}\ \text{عہ}$، $\text{ب} = \text{ر}\ \text{جب}\ \text{عہ}$

تو $$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ر}\,(\text{جم}\ \text{عہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \text{عہ})$$

اب اگر $\text{ر}\,(\text{جم}\ \text{طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \text{طہ})$

اس مساوات کی ایک اصل ہو تو ڈیمواءر کے مسئلہ سے

$$ر^{ن} (\text{جم ن طہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب ن طہ}) = را (\text{جم عہ} + \sqrt{-1}\ \text{جب عہ})$$

اور اسلئے $\quad ر^{ن}\ \text{جم ن طہ} = را\ \text{جم عہ}$

$$ر^{ن}\ \text{جب ن طہ} = را\ \text{جب عہ}$$

اِن کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$ر^{۲ن} = را^{۲} \quad \text{یعنی} \quad ر^{ن} = را$$

جہاں ہم ر اور را دونوں کو مثبت لیتے ہیں کیونکہ زیر بحث جملوں میں اُس جزو ضربی کو ہمیشہ مثبت لیا جا سکتا ہے جس میں زاویہ واقع ہوتا ہے۔

پس

$$\text{جم ن طہ} = \text{جم عہ}،\ \text{جب ن طہ} = \text{جب عہ}$$

اور اس لئے

$$\text{ن طہ} = \text{عہ} + ۲\text{ک}\pi$$

(99) جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ پس مفروضہ ن ویں اصل کی عام شکل ہوگی

$$\sqrt[ن]{را}\left(\text{جم}\ \frac{\text{عہ} + ۲\text{ک}\pi}{ن} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ} + ۲\text{ک}\pi}{ن}\right)$$

اس جملہ میں ک کو عددوں کے سلسلہ $-\infty$ اور $+\infty$ کے درمیان کوئی ن متصلہ قیمتیں دینے سے تمام (ن) ویں اصلیں حاصل ہونگی اور یہ اصلیں تعداد میں ن سے زیادہ نہیں ہونگی کیونکہ وہ ایک دَور پورا ہونے کے بعد تکرار پائینگی۔

ن ویں اصل کے جملہ کو ہم شکل

$$\left\{\sqrt[ن]{را}\left(\text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{ن} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{ن}\right)\right\}\left\{\text{جم}\ \frac{۲\text{ک}\pi}{ن} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{۲\text{ک}\pi}{ن}\right\}$$

میں لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ را = ۱ اور عہ = ۰ تو مساوات

لاⁿ = ا + ب $\sqrt{-1}$ ہو جائیگی لاⁿ = ۱ + ۰ × $\sqrt{-1}$ = $\sqrt{-1}$ ۔ اسلئے ۱ + ۰ × $\sqrt{-1}$ یا اکائی کے ن ویں جذر کی عام شکل ہوگی

جم $\frac{۲ک\pi}{ن}$ + $\sqrt{-1}$ جب $\frac{۲ک\pi}{ن}$

اگر ہم ک کو کوئی معین قیمت دیں مثلاً صفر تو

$\sqrt[ن]{ر}$ (جم $\frac{ع}{ن}$ − $\sqrt{-1}$ جب $\frac{ع}{ن}$)

ا + ب $\sqrt{-1}$ کا ایک ن واں جذر ہوگا۔

اس لئے پچھلے ضابطہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی خیالی مقدار کے تمام ن ویں جذر ان میں سے کسی ایک جذر کو اکائی کے ن ویں جذروں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

ثنائی مساواتوں

لاⁿ = ا + ب $\sqrt{-1}$ ، اور لاⁿ = ا − ب $\sqrt{-1}$

کو ایک ساتھ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ سہ رقمی

لا^۲ن − ۲ ر جم ع × لاⁿ + ر^۲

کے اجزائے ضربی

$\sqrt[ن]{ر}$ {جم $\frac{ع+۲ک\pi}{ن}$ ± $\sqrt{-1}$ جب $\frac{ع+۲ک\pi}{ن}$}

ہیں جہاں ک قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ...، (ن−۱) اختیار کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات لا۵ − ۱ = ۰ کو حل کرو۔

اسکو $لا - ۱$ سے تقسیم کرو تو یہ منکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل ہو جائیگی پھر $ی = لا + \frac{۱}{لا}$ رکھنے سے کعبی

$$ی^۳ + ی^۲ - ۲ی - ۱ = ۰$$

حاصل ہوگا جس کو حل کرنے سے دی ہوئی مساوات کا حل ملجائیگا۔

۲ — $(لا + ۱)^۷ - لا^۷ - ۱$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کرو۔

جواب:- $۷ لا (لا + ۱)(لا^۲ + لا + ۱)^۲$

۳ — وہ مساوات معلوم کرو جس کے حل پر ثنائی مساوات $لا^{۱۱} - ۱ = ۰$ کا حل منحصر ہے۔

جواب:- $ی^۵ + ی^۴ - ۴ی^۳ - ۳ی^۲ + ۳ی + ۱ = ۰$

۴ — اگر ثنائی مساوات کو ($لا - ۱$، $لا + ۱$ یا $لا^۲ - ۱$ سے تقسیم کرکے) منکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ تحویل شدہ مساوات کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں۔ (دیکھو صفحہ (۴۲) مثالیں ۱۵، ۱۶)۔

۵ — اگر اس تحویل شدہ مساوات کو $ی = لا + \frac{۱}{لا}$ رکھ کر تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ ی میں مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور وہ ۲- اور ۲ کے درمیان واقع ہونگی ۔

کیونکہ لا میں دی ہوئی مساوات کی اصلیں $جم ع + \sqrt{-۱}$ جب ع شکل کی ہونگی (دیکھو دفعہ ۵۴)۔ پس $لا + \frac{۱}{لا}$ کی شکل ۲ جم ع ہوگی اور اسکی قیمت حقیقی اور ۲- اور ۲ کے درمیان ہوگی ۔

۶ — ثابت کرو کہ مساوات ذیل منکافی ہے۔ اس کو حل کرو:-

$$۴(لا^۲ - لا + ۱)^۳ - ۲۷ لا^۲ (لا - ۱)^۲ = ۰$$

جواب:- اسکی اصلیں ۲، ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، ۱-، ۱- ہیں۔

۷ — مساوات $لا^۹ - ۱ = ۰$ کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اسکا حل تین کعبی مساواتوں

$$لا^۳ - ۱ = ۰،\quad لا^۳ - س = ۰،\quad لا^۳ - س^۲ = ۰$$

کے حل پر منحصر ہے جہاں سہ، سہ^{۲} اکائی کے خیالی جذر الکعب ہیں۔ اس طرح دی ہوئی مساوات کی تو اصلیں ہونگی

ا، سہ$^{\frac{۱}{۳}}$، سہ$^{\frac{۲}{۳}}$، سہ، سہ$^{\frac{۴}{۳}}$، سہ$^{\frac{۵}{۳}}$، سہ^{۲}، سہ$^{\frac{۷}{۳}}$، سہ$^{\frac{۸}{۳}}$

ا، سہ، سہ^{۲} کو چھوڑ کر باقی چھ اصلیں دی ہوئی مساوات کی خاص اصلیں ہونگی اور یہ اصلیں چھ درجی مساوات

لا^{۶} + لا^{۳} + ۱ = ۰

کی اصلیں ہیں۔

۸ — دفعہ ۵۳ کی مثال ۳ میں آٹھویں درجہ کی مساوات کو ی = لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ کے اندراج سے تحویل کیا جائے تو مساوات

ی^{۴} − ی^{۳} − ۴ی^{۲} + ۴ی + ۱ = ۰

(101) حاصل ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس مساوات کی اصلیں ہیں

۲ جم $\frac{۲\pi}{۱۵}$، ۲ جم $\frac{۴\pi}{۱۵}$، ۲ جم $\frac{۸\pi}{۱۵}$، ۲ جم $\frac{۱۴\pi}{۱۵}$

۹ — مساوات

۴لا^{۴} − ۸۵لا^{۳} + ۳۵۷لا^{۲} − ۳۴۰لا + ۶۴ = ۰

کو تشاکلی مساوات میں تحویل کرو اور اسکو حل کرو۔

فرض کرو　ی = $\frac{\text{لا}}{۲}$ + $\frac{۲}{\text{لا}}$

جواب: — $\frac{۱}{۴}$، ۱، ۴، ۱۶

۱۰ — مساوات

لا^{۴} + م ف لا^{۳} + م^{۲} ق لا^{۲} + م^{۳} ف لا + م^{۴} = ۰

کو حل کرو۔

اسکی اصلوں کو م سے تقسیم کرو تو تشاکلی مساوات حاصل ہوگی۔

۱۱ — اگر مساوات لا^{ن} − ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل عہ ہو جہاں ن عدد مفرد ہے تو

ثابت کرو کہ

(۱ ـ عہ)(۱ ـ عہ^{۲})(۱ ـ عہ^{۳}) .... (۱ ـ عہ^{ن}) = ن

۱۲ ــــ ثابت کرو کہ کعبی مساوات فوراً منکافی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے اگر اسکے سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ کا ربط موجود ہو ـ

۱۳ ــــ ثابت کرو کہ چار درجی فوراً منکافی شکل میں تحویل ہو سکتا ہے اگر سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کا ربط موجود ہو ـ

۱۴ ــ وہ کعبی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

عہ + عہ^{۶} ، عہ^{۳} + عہ^{۴} ، عہ^{۲} + عہ^{۵}

جہاں عہ ، مساوات لا^{۷} ـ ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل ہے ـ

جواب:ـ لا^{۳} + لا^{۲} ـ ۲ لا ـ ۱ = ۰

جب اس کعبی کی اصلیں معلوم ہو جاتی ہیں تو مساوات لا^{۷} ـ ۱ = ۰ کا حل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جا سکتا ہے ـ کیونکہ فرض کرو کہ کعبی کی تین اصلیں لا$_{۱}$ ، لا$_{۲}$ ، لا$_{۳}$ ہیں تب لا^{۲} ـ لا$_{۱}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ اور عہ^{۶} ، لا^{۲} ـ لا$_{۲}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ^{۳} اور عہ^{۴} اور لا^{۲} ـ لا$_{۳}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ^{۲} اور عہ^{۵} ہونگی ـ یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ان کو تقریبی طور پر دسویں باب کے طریقوں کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے ـ

۱۵ ــ وہ کعبی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

عہ + عہ^{۸} + عہ^{۱۲} + عہ^{۵} ، عہ^{۲} + عہ^{۳} + عہ^{۱۱} + عہ^{۱۰} ، عہ^{۴} + عہ^{۶} + عہ^{۹} + عہ^{۷}

جہاں عہ ، مساوات لا^{۱۳} ـ ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل ہے ـ

جواب:ـ لا^{۳} + لا^{۲} ـ ۴ لا + ۱ = ۰

گذشتہ مثال کی طرح یہاں بھی جب کعبی کی اصلیں (جو سب حقیقی ہیں) معلوم ہو جاتی ہیں تو ثنائی مساوات لا^{۱۳} ـ ۱ = ۰ کا حل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جا سکتا ہے فرض کرو کہ کعبی کی اصلیں لا$_{۱}$ ، لا$_{۲}$ ، لا$_{۳}$ ہیں ـ اب یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ لا^{۲} ـ لا$_{۱}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ + عہ^{۱۲} اور عہ^{۸} + عہ^{۵} ، لا^{۲} ـ لا$_{۲}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ^{۲} + عہ^{۱۱} اور عہ^{۳} + عہ^{۱۰} ، اور لا^{۲} ـ لا$_{۳}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ^{۴} + عہ^{۹} اور عہ^{۷} + عہ^{۶} ہیں ـ جب

اِن دو درجی مساواتوں کو حل کرلیا جاتا ہے تو اصلوں کا ہر زوج عہ، عہ^{12}، عہ^{8}، عہ^{5}، وغیرہ ایک دوسرے دو درجی کے حل سے معلوم کیا جاسکتا ہے جیساکہ مثال ماسبق میں بتایا گیا

102) ۱۶ـــ $\text{لا}^{17} - 1 = 0$ کا حل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کرو۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات کی ایک خیالی اصل عہ ہے۔ دو درجی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$\text{عم}_1 \equiv \text{عہ} + \text{عہ}^{9} + \text{عہ}^{13} + \text{عہ}^{15} + \text{عہ}^{16} + \text{عہ}^{8} + \text{عہ}^{4} + \text{عہ}^{2},$$

$$\text{عم}_2 \equiv \text{عہ}^{3} + \text{عہ}^{10} + \text{عہ}^{5} + \text{عہ}^{11} + \text{عہ}^{14} + \text{عہ}^{7} + \text{عہ}^{12} + \text{عہ}^{6},$$

اب یہ بہ آسانی معلوم ہوگا کہ $\text{عم}_1\text{عم}_2 = 4(\text{عم}_1 + \text{عم}_2) = -4$، پس $\text{لا}^2 + \text{لا} - 4 = 0$ کی اصلیں عم_1 اور عم_2 ہیں اور اس دو درجی کو حل کرنے سے معلوم ہوسکتی ہیں۔ پھر فرض کرو کہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{بہ}_1 \equiv \text{عہ} + \text{عہ}^{13} + \text{عہ}^{16} + \text{عہ}^{4} \\ \text{بہ}_2 \equiv \text{عہ}^{9} + \text{عہ}^{15} + \text{عہ}^{8} + \text{عہ}^{2} \end{array}\right\} , \quad \left\{\begin{array}{l} \text{جہ}_1 \equiv \text{عہ}^{3} + \text{عہ}^{5} + \text{عہ}^{14} + \text{عہ}^{12} \\ \text{جہ}_2 \equiv \text{عہ}^{10} + \text{عہ}^{11} + \text{عہ}^{7} + \text{عہ}^{6} \end{array}\right.$$

تو یہ معلوم ہوگا کہ $\text{لا}^2 - \text{عم}_1\text{لا} - 1 = 0$ کی اصلیں بہ_1، بہ_2 اور $\text{لا}^2 - \text{عم}_2\text{لا} - 1 = 0$ کی اصلیں جہ_1، جہ_2 ہیں۔ پھر انہیں سے ہر ایک کو دو حصوں میں جدا کرنے سے اور دو درجی بنانے سے جس کی اصلیں مثلاً $\text{عہ} + \text{عہ}^{16}$، اور $\text{عہ}^{13} + \text{عہ}^{4}$ وغیرہ ہوں دو دو اصلوں کے مجموعے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر آخر میں دو درجی مساواتوں کے حل سے خود اصلوں کو معلوم کیا جاسکتا ہے جیساکہ گذشتہ مثالوں میں کیا گیا۔

یہ اور گذری ہوئی دو مثالیں گاس (Gauss) کے طریقہ کی تمثیلات ہیں جو ثنائی مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = 0$ کو جبری طور پر حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے جبکہ ن عدد مفرد ہو۔ اس قسم کی مساوات کا حل ایسی مساواتوں کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے جن کا درجہ اُس بڑے سے بڑے مفرد عدد سے اعلیٰ تر نہیں ہوتا جو $\text{ن} - 1$ کا جزو ضربی ہے۔ اگر $\text{ن} = 13$ ہو تو حل کعبی کے حل پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ $\text{ن} - 1 = 3 \times 2^{2}$۔ اگر $\text{ن} = 17$ تو حل دو درجی مساواتوں کے حل میں تحویل ہو جاتا ہے کیونکہ $\text{ن} - 1 = 2^{4}$۔ گاؤس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے $\text{ن} - 1$ خیالی اصلوں کو ہر صورت میں ان میں سے کسی ایک کی قوتوں کی بموجب کسی مناسب ترتیب میں مرتب کرنا ضروری ہے۔ عدد مفرد ن کی "ابتدائی اصل"

(Primitive root) میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر اسکو صفر سے ن - ۲ تک متواتر قوتوں میں اُٹھایا جائے اور ہر صورت میں ن سے تقسیم کیا جائے تو ن - ۱ باقی سب کے سب مختلف ہوتے ہیں۔ (Serret's *Cours d' Algebre Superieure vol. II*) - کسی مفرد عدد کی ایسی ابتدائی اصلیں متعدد ہوتی ہیں مثلاً ۱۳ کی ۲، ۶، ۷، اور ۱۱، ۱۷ کی ۳، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴،
گاس خیالی اصلوں کو اس طرح مرتب کرتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک اصل عہ کے متواتر قوت نما، صفر سے ن - ۲ تک، ن کی کسی ابتدائی اصل کی متواتر قوتیں ہوں۔ مثلاً ۱۳ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل لی جائے اور ۲ کی متواتر قوتوں کو ۱۳ سے تقسیم کیا جائے تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملیگا :-

۱، ۲، ۴، ۸، ۳، ۶، ۱۲، ۱۱، ۹، ۵، ۱۰، ۷

اور اس لئے یہ باقی ترتیب کے ساتھ عہ کی متواتر قوتیں ہیں جبکہ قوتوں کو جو ۱۳ سے متجاوز ہوں مساوات $عہ^{۱۳} = ۱$ کے ذریعہ تحویل کر لیا گیا ہو۔ اگر ۱۷ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کے ساتھ یہی سلوک کیا جاتا تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا:-

۱، ۳، ۹، ۱۰، ۱۳، ۵، ۱۵، ۱۱، ۱۶، ۱۴، ۸، ۷، ۴، ۱۲، ۲، ۶

ان سلسلوں کا اوپر کے مفروضات کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ پہلی صورت میں (یعنی ن = ۱۳) بارہ اصلیں چار چار کے تین مجموعوں میں منقسم ہوئی تھیں اور دوسری صورت میں سولہ اصلیں آٹھ آٹھ کے دو مجموعوں میں۔ کسی صورت میں تقسیم کا طریقہ ن - ۱ کے اجزائے ضربی کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے اور عام صورت میں یہ بتانا مشکل نہیں کہ اس قسم کے کسی دو گروہوں کا حاصل ضرب دو یا اس سے زیادہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے جیسا کہ طالب علم کو اوپر کی مخصوص مثالوں سے واضح ہوگیا ہوگا۔

کسی خاص صورت میں گاس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے صرف چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کا معلوم ہونا ضروری ہے اور اس کو بغیر کسی مشکل کے آزمائش سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ تین سادہ ترین مفرد عددوں ۲، ۳، ۵ میں سے کوئی نہ کوئی ۱۰۰ سے

چھوٹے ہر مفرد عدد کی ابتدائی اصل ہے سوائے ۴۱ اور ۷۱ کے جن کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصلیں علی الترتیب ۶ اور ۷ ہیں۔ تمام ابتدائی اصلوں کو معلوم کرنیکے طریقے سیرے کی متذکرہ بالا تصنیف میں دئے گئے ہیں۔

۱۷۔ آزمائش سے ۱۹ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل معلوم کرو۔ اور اسلئے بتاؤ کہ مساوات $لا^{۱۹} - ۱ = ۰$ کو کس طرح حل کیا جا سکتا ہے۔

یہ بہ آسانی معلوم ہو جاتا ہے کہ ۲ چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل ہے اور ۱۹ سے تقسیم کرنیکے بعد جو باقی حاصل ہوتے ہیں وہ اس دوران میں معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ $۱۸ = ۳^{۲} \times ۲$ اسلئے حل کعبی اور دو درجی مساواتوں پر منحصر ہوگا۔ پہلا کعبی ایسی مساوات بنانے سے معلوم ہوگا جسکی اصلیں ہیں

$$ع + ع^{۸} + ع^{۷} + ع^{۱۸} + ع^{۱۱} + ع^{۱۲}،$$

$$ع^{۲} + ع^{۱۶} + ع^{۱۴} + ع^{۱۷} + ع^{۳} + ع^{۵}،$$

$$ع^{۴} + ع^{۱۳} + ع^{۹} + ع^{۱۵} + ع^{۶} + ع^{۱۰}$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ ان ثنائی مساواتوں میں سے جنکا درجہ ایک مفرد عدد ہو اور حل دو درجی مساواتوں پر منحصر ہو $لا^{۱۷} - ۱ = ۰$ کے بعد کم سے کم درجہ والی مساوات $لا^{۲۵۷} - ۱ = ۰$ ہے۔

۲۵۷ کے بعد آنے والا مفرد عدد جو اس شرط کو پورا کرے کہ $ن - ۱ = ۲^{ک}$ (جہاں ک صحیح عدد ہے) ۶۵۵۳۷ ہے۔ اسلئے ہمیں ایسے عددوں کا سلسلہ ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷..... ملیگا۔ گاس (*Disquisitiones Arithmeticæ* دفعہ ۳۶۵ میں) لکھتا ہے کہ ہندسی اعمال سے دائرہ کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرنا یا ن ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع بنانا ناممکن ہے جبکہ ن انہیں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔

۱۹۔ اگر مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلیں $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$، .... ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$ع_{۱} + \frac{۱}{ع_{۱}}،\ ع_{۲} + \frac{۱}{ع_{۲}}،\ \ldots\ldots،\ ع_{ن} + \frac{۱}{ع_{ن}}$$

متماثلہ

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} \equiv (لا - ع_{۱})(لا - ع_{۲}) \ldots (لا - ع_{ن})$$

میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے (دیکھو دفعہ ۳۲)

$$ب_{ن} لا^{ن} + ب_{ن-۱} لا^{ن-۱} + \ldots + ب_{۲} لا^{۲} + ب_{۱} لا + ۱ \equiv ب_{ن} (لا - \frac{۱}{ع_{۱}})(لا - \frac{۱}{ع_{۲}}) \ldots (لا - \frac{۱}{ع_{ن}})$$

اِن متماثلات کو باہم ضرب دیکر $لا^{ن}$ سے تقسیم کرو تو بائیں طرف کے اجزا شکل $لا + \frac{۱}{لا} - (ع_{ر} + \frac{۱}{ع_{ر}})$ اختیار کرینگے۔ فرض کرو $لا + \frac{۱}{لا} = ی$ تو دفعہ ۴۵ کے روابط کی مدد سے دائیں جانب کے جملہ کو ی میں ن ویں درجہ کے کثیر الارقام کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

۲۰ ـــ مساوات

$$ا_{۰} لا^{۴} + ۴ ا_{۱} لا^{۳} + ۶ ا_{۲} لا^{۲} + ۴ ا_{۳} لا + ا_{۴} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\Sigma ع^{۲} ہ^{۲} (جہ - ضہ)^{۲}$ کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو مثال ۱۹ صفحہ ۱۰۴ کے نتیجہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے اگر اصلوں کو ان کے متکافیوں میں تبدیل کیا جائے استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\Sigma (\frac{۱}{ع} - \frac{۱}{ہ})^{۲}$ کی قیمت معلوم کیجائے اور $ع^{۲} ہ^{۲} جہ^{۲} ضہ^{۲}$ سے ضرب دیا جائے جو $\frac{ا_{۴}^{۲}}{ا_{۰}^{۲}}$ کے مساوی ہے۔

جواب:- $ا_{۰}^{۲} \Sigma ع^{۲} ہ^{۲} (جہ - ضہ)^{۲} = ۴۸ (ا_{۳}^{۲} - ا_{۲} ا_{۴})$

اُن متشاکل تفاعلوں کی قیمتوں سے جو تیسرے باب میں درج ہیں، دوسرے متعدد متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں متذکرہ بالا عمل سے حاصل کیجا سکتی ہیں۔

۲۱ ـــ مساوات

$$ا_{۰} لا^{ن} + ن ا_{۱} لا^{ن-۱} + \frac{ن (ن-۱)}{۱ \times ۲} ا_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ن ا_{ن-۱} لا + ا_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل ∑ (عہ۱ - عہ۲)۲ عہ۳۲ عہ۴۲ ...... عہن۲ کی قیمت معلوم کرو۔

ہمیں بہ آسانی ا۰۲ ∑ (عہ۱ - عہ۲)۲ = ن۲ (ن - ۱) (ا۱۲ - ا۰ ا۲) حاصل ہوتا ہے

اور اصلوں کو اِن کے متکافیوں میں تبدیل کرنے سے

ا۰۲ ∑ (عہ۱ - عہ۲)۲ عہ۳۲ عہ۴۲ .... عہن۲ = ن۲ (ن - ۱) (ان-۱۲ - ان-۲ ان)

۲۲ — ثابت کرو کہ مساوات

لا۵ - ۵ ف لا۳ + ۵ ف۲ لا + ۲ ق = ۰

کی اصلیں ہیں

۵√ا + ۵√ب ، طہ ۵√ا + طہ۴ ۵√ب ، طہ۲ ۵√ا + طہ۳ ۵√ب

طہ۴ ۵√ا + طہ ۵√ب ، طہ۳ ۵√ا + طہ۲ ۵√ب

جہاں ۵√ا ب = ف ، ا + ب = - ۲ ق اور طہ اکائی کا پانچواں جذر ہے۔

نوٹ :- جب کثیر درجی مساوات اس شکل میں تحویل ہوتی ہے تو اُسکو فوراً حل کیا جاسکتا ہے۔

۲۳ — مثال ماسبق میں اصلوں کی بجائے مثلثی جملے لکھو اور ف کو مثبت فرض کرکے ثابت کرو کہ

(۱) جب ف۵ > ق۲ تو ایک اصل حقیقی اور چار اصلیں خیالی ہیں۔

(۲) جب ف۵ < ق۲ تو تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

(۳) جب ف۵ = ق۲ تو ایک جزو ضربی دو درجی جملہ کا مربع ہے۔

۲۴ — اگر طہ اکائی کا پانچواں جذر ہو تو حاصل ضرب

(عہ + یہ + جہ) (عہ + طہ یہ + طہ۴ جہ) (عہ + طہ۲ یہ + طہ۳ جہ) (عہ + طہ۳ یہ + طہ۲ جہ) (عہ + طہ۴ یہ + طہ جہ)

کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :- عہ^{۵} + بہ^{۵} + جہ^{۵} - ۵ عہ بہ جہ (عہ^{۲} - بہ جہ)

۲۵ ـــ وہ چار درجی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

عہ + ۲ عہ^{۴} ، عہ^{۲} + ۲ عہ^{۳} ، عہ^{۳} + ۲ عہ^{۲} ، عہ^{۴} + ۲ عہ

جہاں لا^{۵} - ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل عہ ہے ۔

جواب :- لا^{۴} + ۳ لا^{۳} - لا^{۲} - ۳ لا + ۱۱ = ۰

(105)

چھٹا باب

کعبی اور چار درجی کا جبری حل

۵۵ — مساواتوں کا جبری حل — کعبی اور چار درجی مساواتوں کے حل پر بحث کرنے سے پیشتر ہم چند تمہیدی باتیں بیان کرینگے تا کہ طالب علم اُن عام اصولوں سے اچھی طرح واقف ہو جائے جن پر اِن مساواتوں کا جبری حل منحصر ہوتا ہے۔ اس مقصد کو پیش نظر رکھکر ہم اس دفعہ میں دو درجی مساوات (مساوات درجہ دوم) کے حل کے تین طریقے درج کرینگے اور ساتھ ہی یہ بھی بیان کرتے جائینگے کہ کس طرح اِن طریقوں کو کعبی اور چار درجی مساواتوں کا جبری حل حاصل کرنے میں وسیع کیا جاسکتا ہے۔ بعد کے دفعات میں ہم اِن اصولوں کی پوری تشریح کرینگے۔

(۱) حل کا پہلا طریقہ۔ اصل کیلئے عام شکل ف + √ق فرض کرنے سے

چونکہ جملہ ف + √ق کی دو اور صرف دو قیمتیں ہیں جبکہ جذرالمربع کو دوہری علامت (±) کے ساتھ لیا جاتا ہے اسلئے دو درجی کی اصل کے لئے ایسے جملہ کو فرض کرنا بالکل درست ہے۔ اسلئے لا = ف + √ق رکھکر اس کو منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$لا^{۲} - ۲ ف لا + ف^{۲} - ق = ۰$$

اب اگر یہ دی ہوئی دو درجی مساوات

$$\text{لا}^{۲} + \text{ف لا} + \text{ق} = ۰$$

کے ساتھ متماثل ہو تو

$$۲\,\text{ف} = -\text{ف}\,،\ \text{ف}^{۲} - \text{ق} = \text{ق}$$

اسلئے $$\text{لا} = \text{ف} + \sqrt{\text{ق}} = \frac{-\text{ف} \pm \sqrt{\text{ف}^{۲} - ۴\,\text{ق}}}{۲}$$

جو دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

کعبی مساوات کی صورت میں ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\sqrt[۳]{\text{ف}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{\text{ف}}} \quad \text{اور} \quad \sqrt[۳]{\text{ف}}\,\sqrt[۳]{\text{ق}}\,(\sqrt[۳]{\text{ف}} + \sqrt[۳]{\text{ق}})$$

(106) دونوں شکلیں ایسی ہیں جو حل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہوسکتی ہیں کیونکہ ان جملوں کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جبکہ جذر الکعبوں کو عام سے عام صورت میں لیا جائے۔

چار درجی مساوات کی صورت میں ہمیں یہ معلوم ہوگا کہ

$$\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \frac{۱}{\sqrt{\text{ف}}\,\sqrt{\text{ق}}}\ ،\ \sqrt{\text{ق}}\,\sqrt{\text{ر}} + \sqrt{\text{ر}}\,\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ف}}\,\sqrt{\text{ق}}$$

دونوں شکلیں ایسی ہیں جو حل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہوسکتی ہیں کیونکہ ان جملوں سے لا کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ جذر المربعوں کو دوہری علامت لگا دی جائے۔

(۲) حل کا دوسرا طریقہ۔ اجزائے ضربی میں تحویل کرنے سے۔

فرض کرو کہ دو درجی $\text{لا}^{۲} + \text{ف لا} + \text{ق}$ کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کرنا مطلوب ہے۔ اس مقصد کے لئے ہم اسکو شکل

$$\text{لا}^{۲} + \text{ف لا} + \text{ق} + \text{طہ} - \text{طہ}\,،$$

میں رکھتے ہیں اور طہ کو اس طرح متعین کرتے ہیں کہ

$$\text{لا}^{۲} + \text{ف لا} + \text{ق} + \text{طہ}$$

کامل مربع ہو سکے۔ اب یہ جملہ کامل مربع ہوگا اگر

طہ + ق = ف^2/۴ یعنی طہ = (ف^2 - ۴ ق)/۴

اس قیمت کو طہ کی بجائے درج کیا جائے تو

لا^2 + ف لا + ق = (لا + ف/۲)^2 - ($\sqrt{}$ف^2 - ۴ ق / ۲)^2

پس ہم نے دو درجی کو شکل ع^2 - و^2 میں تحویل کر دیا جس کے مفرد اجزائے ضربی ع + و اور ع - و ہیں۔

اسی طرح ہم کعبی کو شکل

(ل لا + م)^3 - (لَ لا + مَ)^3 یا ع^3 - و^3

میں تحویل کرینگے اور اسکا حل مساواتوں ع - و = ۰، ع - سہ و = ۰، ع - سہ^2 و = ۰ سے حاصل کرینگے۔

یہ بھی دکھایا جائیگا کہ چار درجی کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے شکلوں

(ل لا^2 + م لا + ن)^2 - (لَ لا^2 + مَ لا + نَ)^2

(لا^2 + ف لا + ق) (لا^2 + فَ لا + قَ)

میں سے کسی ایک میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اور پھر دو دو درجی مساواتوں کو حل کرنے سے چار درجی کا مکمل حل معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی پہلی صورت میں ل لا^2 + م لا + ن = ± (لَ لا^2 + مَ لا + نَ) کو اور دوسری صورت میں لا^2 + ف لا + ق = ۰ اور لا^2 + فَ لا + قَ = ۰ کو حل کرنے سے دئے ہوئے چار درجی کا مکمل حل معلوم ہوتا ہے۔

(۳) حل کا تیسرا طریقہ۔ اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے۔

دو درجی مساوات لا^2 + ف لا + ق = ۰ پر غور کرو جس کی اصلیں عہ اور بہ ہیں۔ اصلوں کے درمیان ربط ملینگے

عہ + بہ = - ف،

عہ بہ = ق

اگر ہم اِن مساواتوں سے عہ اور بہ کو متعین کرنے کی کوشش کریں تو ہم ابتدائی مساوات پر پہنچ جائینگے (دیکھو دفعہ ۲۴) ۔ لیکن اگر ہمیں اصلوں اور سِروں کے درمیان کوئی اور ربط معلوم ہو جائے جو ل عہ + م بہ = فا(ف، ق) کی شکل کا ہو تو ہم آسانی سے عہ اور بہ کو اس مساوات اور مساوات عہ + بہ = ـ ف سے معلوم کر سکینگے ۔

دو درجی کی صورت میں مطلوبہ مساوات معلوم کرنے میں کوئی دقت نہیں ہے کیونکہ صریحاً

$$(عہ - بہ)^{2} = ف^{2} - ۴ق$$

اور اسلئے

$$عہ - بہ = \sqrt{ف^{2} - ۴ق}$$

کعبی مساوات $لا^{3} + ف لا^{2} + ق لا + ر = 0$ کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ کو معلوم کرنیکے لئے مساوات عہ + بہ + جہ = ـ ف کے علاوہ

$$ل عہ + م بہ + ن جہ = فا(ف، ق، ر)$$

کی شکل کی دو مساواتیں مطلوب ہوتی ہیں ۔ آیندہ ہم ثابت کرینگے کہ ایک دو درجی مساوات کو حل کرنے سے تفاعلوں

$$(عہ + سہ بہ + سہ^{2} جہ)^{3}، (عہ + سہ^{2} بہ + سہ جہ)^{3}$$

کو کعبی کے سِروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور جب اِن تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں تو کعبی کی اصلیں آسانی سے معلوم کیجا سکتی ہیں ۔

چار درجی مساوات

$$لا^{4} + ف لا^{3} + ق لا^{2} + ر لا + س = 0$$

کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کو معلوم کرنیکے لئے مساوات عہ + بہ + جہ + ضہ = ـ ف کے علاوہ

$$ل عہ + م بہ + ن جہ + ر ضہ = فا(ف، ق، ر، س)$$

کی شکل کی تین مساواتوں کی ضرورت پڑیگی ۔ دفعہ ۶۶ میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ حسب ذیل تین تفاعلوں

(به + جه - عه - ضه)^2 ' (جه + عه - ضه - به)^2 ' (عه + به - جه - ضه)^2

کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور جب انکی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو چار درجی مساوات کی اصلیں فوراً حاصل ہو سکتی ہیں ۔

۵۶ ۔ کعبی مساوات کا جبری حل ۔ فرض کرو کہ عام کعبی مساوات

$$\text{ا لا}^3 + ٣\,\text{ب لا}^2 + ٣\,\text{ج لا} + \text{د} = ٠$$

کو شکل

$$\text{ی}^3 + ٣\,\text{ھ ی} + \text{گ} = ٠$$

میں رکھا گیا ہے جہاں

ی ≡ ا لا + ب ' ھ ≡ ا ج - ب^2 ' گ ≡ ا^2 د - ٣ ا ب ج + ٢ ب^3

(دفعہ ٣٦)

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے فرض کرو[1]

$$\text{ی} = \sqrt[3]{\text{ف}} + \sqrt[3]{\text{ق}}$$

اس کا مکعب لینے سے

$$\text{ی}^3 = \text{ف} + \text{ق} + ٣\sqrt[3]{\text{ف}}\sqrt[3]{\text{ق}}\left(\sqrt[3]{\text{ف}} + \sqrt[3]{\text{ق}}\right)$$

اس لئے

$$\text{ی}^3 - ٣\sqrt[3]{\text{ف}}\sqrt[3]{\text{ق}}\ \text{ی} - (\text{ف} + \text{ق}) = ٠$$

اب سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\sqrt[3]{\text{ف}}\ \sqrt[3]{\text{ق}} = -\text{ھ}\ '\ \text{ف} + \text{ق} = -\text{گ}$$

ان مساواتوں سے حاصل ہوگا

---

[1] اس حل کو کارڈن کا حل کہتے ہیں ۔ دیکھو نوٹ ۶ اس جلد کے ختم پر ۔

$$ف = \frac{1}{2}\left(-گ + \sqrt{گ^2 + 4ھ^3}\right) ، ق = \frac{1}{2}\left(-گ - \sqrt{گ^2 + 4ھ^3}\right)$$

(109) اور $\sqrt[3]{ق}$ کی بجائے اسکی قیمت $\frac{-ھ}{\sqrt[3]{ف}}$ درج کرنے سے

$$ی = \sqrt[3]{ف} + \frac{-ھ}{\sqrt[3]{ف}}$$

اور یہ مساوات

$$ی^3 + 3ھی + گ = 0$$

کا جبری حل ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگر ف کی بجائے ق رکھدیا جائے تو ی کی یہ قیمت نہیں بدلتی کیونکہ ایسا کرنے سے صرف رقموں کا آپس میں تبادلہ ہوتا ہے۔

نیز چونکہ $\sqrt[3]{ف}$ کی تین قیمتیں $\sqrt[3]{ف}$ ، $سہ\sqrt[3]{ف}$ ، $سہ^2\sqrt[3]{ف}$ ہیں جو ان میں سے کسی ایک کو اکائی کے تین جذرالکعبوں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہیں اسلئے ی کی تین اور صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$\sqrt[3]{ف} + \frac{-ھ}{\sqrt[3]{ف}} ، سہ\sqrt[3]{ف} + سہ^2\frac{-ھ}{\sqrt[3]{ف}} ، سہ^2\sqrt[3]{ف} + سہ\frac{-ھ}{\sqrt[3]{ف}}$$

ان قیمتوں کی ترتیب صرف ف کے منتخب شدہ جذرالکعب کی بموجب بدلتی ہے۔
اب اگر ی کی بجائے اس کی قیمت ا لا + ب رکھدیجائے تو

$$ا لا + ب = \sqrt[3]{ف} + \frac{-ھ}{\sqrt[3]{ف}}$$

(جہاں ف کی قیمت وہ ہے جو سروں کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے) اور یہ کعبی مساوات

$$ا لا^3 + 3ب لا^2 + 3ج لا + د = 0$$

کا مکمل جبری حل ہے۔ اسمیں جذرالکعب اور جذرالمربع عام سے عام شکل میں

لئے گئے ہیں۔

۵۷۔ عددی مساواتوں پر استعمال۔ اگر کعبی کے سر دئے ہوئے عدد ہوں تو کعبی کا حل جو ہم نے اوپر حاصل کیا ہے دو درجی کے حل کے برخلاف کوئی عملی قیمت نہیں رکھتا حالانکہ جبری حل کے لحاظ سے یہ حل بالکل مکمل ہے۔
کیونکہ جب کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں تو $گ^2 + ۴ ھ^3 = - ک^2$ جو لازماً منفی عدد ہے (دیکھو دفعہ ۴۳) اور ف اور ق کی بجائے انکی قیمتیں

$$\frac{1}{2}(- گ \pm ک \sqrt{-1})$$

ضابطہ $\sqrt[3]{ف} + \sqrt[3]{ق}$ میں درج کیجائیں تو کعبی کی اصل کے لئے ہمیں حسب ذیل جملہ ملیگا:-

$$\left(\frac{- گ + ک \sqrt{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{- گ - ک \sqrt{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اب ایسے مختلط عددوں کا جذر الکعب نکالنے کے لئے کوئی عام حسابی عمل موجود نہیں ہے اور اسلئے جہانتک کہ حسابی عمل کا تعلق ہے یہ ضابطہ بیکار ہے۔
لیکن جب کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہو تو ضابطہ

$$\left(\frac{- گ + \sqrt{گ^2 + ۴ ھ^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{- گ - \sqrt{گ^2 + ۴ ھ^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

سے ایک عددی قیمت حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں $گ^2 + ۴ ھ^3$ مثبت ہے۔ لیکن یہ عمل بھی عددی کعبی کی حقیقی اصل معلوم کرنیکے لئے بے سود ہے۔
پہلی صورت میں یعنی جب کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنیکے لئے ہم علم مثلث کا استعمال حسب طریقہ ذیل کر سکتے ہیں۔
فرض کرو $۲ ر^3 جم فہ = - گ$ اور $۲ ر^3 جب فہ = ک$

تو $ف = ر^3 و^{فہ \sqrt{-1}}$ ، $ق = ر^3 و^{-فہ \sqrt{-1}}$

نیز $مس\ فہ = -\frac{ک}{گ}$ ، اور $ر = \frac{1}{2}(گ^2 + ک^2)^{\frac{1}{2}} = (-ھ)^{\frac{3}{2}}$

اور چونکہ $سہ = جم\ \frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\ جب\ \frac{2\pi}{3} = قو^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$

اس لئے کعبی

$$ی^3 + 3ھ\,ی + گ = ۰$$

کی تین اصلیں

$$\sqrt[3]{ف} + \sqrt[3]{ق}\ ،\ سہ\sqrt[3]{ف} + سہ^2\sqrt[3]{ق}\ ،\ سہ^2\sqrt[3]{ف} + سہ\sqrt[3]{ق}$$

ہو جاتی ہیں

$$2(-ھ)^{\frac{1}{2}}\ جم\ \frac{فہ}{3}\ ،\ -2(-ھ)^{\frac{1}{2}}\ جم\ \frac{\pi \pm فہ}{3}$$

اِن ضابطوں سے کعبی کی اصلوں کی عددی قیمتیں جیوب اور جیوب التمام کی جدول کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ طریقہ بھی عملی طور پر کچھ آسان نہیں اور عام طور پر حقیقی اصلوں کو حسابی طریقہ سے محسوب کرنیکے لئے اُن طریقوں کو استعمال کرنا چاہیے جو آیندہ دسویں باب میں بیان کئے جائینگے۔ (111)

۵۸ ۔ کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے کعبی

$$ا\,لا^3 + 3ب\,لا^2 + 3ج\,لا + د \equiv ف(لا)$$

کو شکل

$$ی^3 + 3ھ\,ی + گ$$

میں رکھا گیا ہے جہاں $ی = ا\,لا + ب$

اب فرض کرو

$$ی^3 + 3ھ\,ی + گ \equiv \frac{1}{مہ - نہ}\{مہ(ی + نہ)^3 - نہ(ی + مہ)^3\} \quad ...(1)$$

جہاں مہ اور نہ دریافت شدنی مقداریں ہیں ۔ اس متماثلہ کی بائیں جانب کے جملہ کو مختصر کرو تو وہ ہو جائیگا

$$ی^۳ - ۳ مہ نہ ی - مہ نہ (مہ + نہ)$$

سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$مہ نہ = - ھ ، مہ نہ (مہ + نہ) = - گ$$

اسلئے $$مہ + نہ = \frac{گ}{ھ} ، مہ - نہ = \frac{ا\sqrt{\Delta}}{ھ}$$

جہاں $ا^۲ \Delta \equiv گ^۲ + ۴ ھ^۳$ ، حسب دفعہ ۴۲ ۔

نیز $$(ی + نہ)(ی + مہ) \equiv ی^۲ + \frac{گ}{ھ} ی - ھ$$

اسلئے ی کی بجائے اسکی قیمت ا لا + ب رکھنے پر ہمیں (۱) سے حاصل ہوگا

$$ا^۲ ف (لا) \equiv \left(\frac{گ + ا\Delta^{\frac{1}{۲}}}{۲ \Delta^{\frac{1}{۲}}}\right)\left(ا لا + ب + \frac{گ - ا\Delta^{\frac{1}{۲}}}{۲ ھ}\right)^۳$$

$$- \left(\frac{گ - ا\Delta^{\frac{1}{۲}}}{۲ \Delta^{\frac{1}{۲}}}\right)\left(ا لا + ب + \frac{گ + ا\Delta^{\frac{1}{۲}}}{۲ ھ}\right)^۳$$

جو دو مکعبوں کا مطلوبہ فرق ہے ۔

(12) اس متماثلہ کی مدد سے کعبی کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کیا جا سکتا ہے اور کعبی مساوات کا مکمل حل معلوم ہو سکتا ہے ۔ اب ہم مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں مہ اور نہ کی رقوم میں حاصل کرینگے ۔ مساوات

$$(مہ - نہ) ا^۲ ف (لا) \equiv مہ (ی + نہ)^۳ - نہ (ی + مہ)^۳ = ۰$$

کو ثنائی کعبی کے طور پر حل کیا جائے تو ی = ا لا + ب کے لئے ہمیں حسب ذیل تین قیمتیں ملینگی :-

$$\sqrt[۳]{مہ}\,\sqrt[۳]{نہ}\,(\sqrt[۳]{مہ} + \sqrt[۳]{نہ}) ،$$

$$\sqrt[۳]{مہ}\,\sqrt[۳]{نہ}\,(س \sqrt[۳]{مہ} + س^۲ \sqrt[۳]{نہ}) ،$$

$$\sqrt[3]{مہ}\ \sqrt[3]{نہ}\ (سہ^{2}\sqrt[3]{مہ} + سہ\sqrt[3]{نہ})$$

اب اگر $\sqrt[3]{مہ}$ اور $\sqrt[3]{نہ}$ کی بجائے جذرالکعبوں کا کوئی زوج رکھدیا جائے جو دو سلسلوں

$$\sqrt[3]{مہ}،\ سہ\sqrt[3]{مہ}،\ سہ^{2}\sqrt[3]{مہ}$$

$$\sqrt[3]{نہ}،\ سہ\sqrt[3]{نہ}،\ سہ^{2}\sqrt[3]{نہ}$$

میں سے ہر ایک سے ایک ایک جذرالکعب منتخب کرکے بنایا گیا ہو تو یہ معلوم ہوگا کہ می کی وہی تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ان قیمتوں کی صرف ترتیب منتخب شدہ جذرالکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جملہ

$$\sqrt[3]{مہ}\ \sqrt[3]{نہ}\ (\sqrt[3]{مہ} + \sqrt[3]{نہ})$$

کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جبکہ جذرالکعبوں کو عام سے عام شکل میں لیا جائے۔ اسلئے یہ شکل دفعہ ماسبق کی حاصل شدہ شکل کے علاوہ ایسی شکل ہے جو کعبی مساوات کی اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے۔ دیکھو دفعہ ۵۵ (۱)۔

جب تفاعل (۲) کو (جو اوپر بیان ہوا) مستحیل کرکے مختصر کیا جاتا ہے تو وہ

$$\frac{ا^{2}}{ھ}\left\{(اج - ب^{2})\,لا^{2} + (اد - ب\,ج)\,لا + (ب\,د - ج^{2})\right\}$$

ہوجاتا ہے، اسلئے اس دو درجی کے اجزائے ضربی دو ثنائی جملے

$$ا\,لا + ب + مہ،\quad ا\,لا + ب + نہ$$

ہیں جو ف (لا) کے مذکورہ بالا جملہ میں دو مکعبوں کے فرق کے طور پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۹ — اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ کعبی کا حل۔ چونکہ جملہ

(113)

۱/۳ {عہ + بہ + جہ + طہ(عہ + سہ بہ + سہ^۲ جہ) + طہ^۲(عہ + سہ^۲ بہ + سہ جہ)}

کی تین قیمتیں عہ، بہ، جہ ہیں، جبکہ طہ، قیمتیں ۱، سہ، سہ^۲ اختیار کرے اسلئے یہ ظاہر ہے کہ اگر تفاعلوں

طہ (عہ + سہ بہ + سہ^۲ جہ)، طہ^۲ (عہ + سہ^۲ بہ + سہ جہ)

کو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکے تو ہم مندرجہ بالا ضابطہ میں ان قیمتوں کو درج کرنے سے کعبی مساوات کا جبری حل معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ان تفاعلوں کی قیمت ایک دو درجی مساوات کے حل کرنے سے بالراست حاصل نہیں ہو سکتی کیونکہ اگرچہ مندرجہ بالا دو تفاعلوں کا حاصل ضرب عہ، بہ، جہ کا ایک ابھی مطلوب تشاکل تفاعل ہے مگر ان کا مجموعہ ایسا تفاعل نہیں ہے۔ اس کے باوجود یہ معلوم ہوگا کہ ان دو تفاعلوں کے مکعبوں کا مجموعہ اصلوں کا ایک تشاکل تفاعل ہے اور اس لئے سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جیسا کہ ہم اب بتائینگے۔ سہولت کے مدنظر ہم ترتیم ذیل اختیار کرتے ہیں

ل ≡ عہ + سہ بہ + سہ^۲ جہ

م ≡ عہ + سہ^۲ بہ + سہ جہ

تو

(طہ ل)^۳ = ا + ب سہ + ج سہ^۲،

(طہ^۲ م)^۳ = ا + ب سہ^۲ + ج سہ،

جہاں

ا = عہ^۳ + بہ^۳ + جہ^۳ + ۶ عہ بہ جہ، ب = ۳(عہ^۲ بہ + بہ^۲ جہ + جہ^۲ عہ)،

ج = ۳ (عہ بہ^۲ + بہ جہ^۲ + جہ عہ^۲)

اس لئے حاصل ہوتا ہے

ل^۳ + م^۳ = ۲ Σ عہ^۳ − ۳ Σ عہ^۲ بہ + ۱۲ عہ بہ جہ = −۲۷ گ/ل

(دیکھو مثال ۵ صفحہ ۶۰ اور مثال ۱۵ صفحہ ۶۹) ۔

نیز

(طہ ل)(طہ^2 م) = ل م = عہ^2 + بہ^2 + جہ^2 − بہ جہ − جہ عہ − عہ بہ

$$= -9 \frac{ھ}{ا^2}$$

اس لئے دو درجی مساوات

$$ت^2 + 3^3 \frac{گ}{ا^3} ت - 3^6 \frac{ھ^3}{ا^6} = 0$$

کی اصلیں ہیں

(عہ + سہ بہ + سہ^2 جہ)^3 ، (عہ + سہ^2 بہ + سہ جہ)^3

اس مساوات کی اصلوں کو یعنی

$$\frac{3^3}{2 ا^3} \left(-گ \pm \sqrt{گ^2 + 4 ھ^3}\right)$$

(114) کو $ت_1$ اور $ت_2$ سے تعبیر کیا جائے تو ابتدائی ضابطہ سے جو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان ہو چکا ہے ہمیں تین اصلیں حاصل ہونگی

$$عہ = -\frac{ب}{ا} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{ت_1} + \sqrt[3]{ت_2}\right)،$$

$$بہ = -\frac{ب}{ا} + \frac{1}{3}\left(سہ \sqrt[3]{ت_1} + سہ^2 \sqrt[3]{ت_2}\right)،$$

$$جہ = -\frac{ب}{ا} + \frac{1}{3}\left(سہ^2 \sqrt[3]{ت_1} + سہ \sqrt[3]{ت_2}\right)$$

یہاں یہ بات دیکھ لی جا سکتی ہے کہ عہ، بہ، جہ کی جن قیمتوں پر ہم پہنچے ہیں وہ اسی شکل کی ہیں جو دفعہ ۵۶ میں حاصل ہوئی تھیں ۔

تفاعلوں

(عہ + سہ بہ + سہ^2 جہ)^3 ، (عہ + سہ^2 بہ + سہ جہ)^3

کی اس خاصیت کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ وہ تین مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو باہم کسی طرح ایک دوسرے کی جگہ بدل دیا جائے۔ اسی خاصیت کی بناء پر کعبی مساوات کا حل دو درجی مساوات کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔ عہ، بہ، جہ کے متعدد تفاعل ایسے ہیں جنمیں یہ خاصیت پائی جاتی ہے اور آئندہ چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ کسی دو ایسے تفاعلوں میں ایک منطق خطی ربط موجود ہوتا ہے جو سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

کعبی کو جبری طریقہ پر حل کرنے کے متعدد طریقوں پر مکمل بحث کرنیکے بعد ہم ایسی مثالیں درج کرتے ہیں جنمیں دفعات ماسبق کے اصول استعمال میں آتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ جملہ

$$(\text{بہ}-\text{جہ})^{2}(\text{لا}-\text{عہ})^{2}+(\text{جہ}-\text{عہ})^{2}(\text{لا}-\text{بہ})^{2}+(\text{عہ}-\text{بہ})^{2}(\text{لا}-\text{جہ})^{2}$$

کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

فرض کرو $\text{ع}=(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{لا}-\text{عہ})$، $\text{و}=(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})$،

$$\text{ھ}=(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{لا}-\text{جہ})$$

جواب:— $\frac{۲}{۳}(\text{ع}+\text{سہ}\,\text{و}+\text{سہ}^{2}\text{ھ})(\text{ع}+\text{سہ}^{2}\text{و}+\text{سہ}\,\text{ھ})$

۲۔ ثابت کرو کہ نظام

$$(\text{بہ}-\text{جہ})^{3}(\text{لا}-\text{عہ})^{3}=(\text{جہ}-\text{عہ})^{3}(\text{لا}-\text{بہ})^{3}=(\text{عہ}-\text{بہ})^{3}(\text{لا}-\text{جہ})^{3}$$

کی مساواتوں میں دو اجزائے ضربی مشترک ہیں۔

مثال ماسبق کی ترقیم کو اختیار کرنے سے

$$\text{ع}^{3}=\text{و}^{3}=\text{ھ}^{3}$$

جس سے $\text{ع}^{3}-\text{و}^{3}=(\text{ع}-\text{و})(\text{ع}^{2}+\text{ع}\,\text{و}+\text{و}^{2})\equiv\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{و})(\text{ع}^{2}+\text{و}^{2}+\text{ھ}^{2})$

کیونکہ $\text{ع}+\text{و}+\text{ھ}=0$

115)

اسلئے $(ب-جہ)^2(لا-عہ)^2+(جہ-عہ)^2(لا-ب)^2+(عہ-ب)^2(لا-جہ)^2$
مطلوبہ مشترک جزو ضربی ہے جو دوسرے درجہ کا ہے۔

۳۔ حسب ذیل جملوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

(۱) $(ب-جہ)^3(لا-عہ)^3+(جہ-عہ)^3(لا-ب)^3+(عہ-ب)^3(لا-جہ)^3$،

(۲) $(ب-جہ)^5(لا-عہ)^5+(جہ-عہ)^5(لا-ب)^5+(عہ-ب)^5(لا-جہ)^5$،

(۳) $(ب-جہ)^7(لا-عہ)^7+(جہ-عہ)^7(لا-ب)^7+(عہ-ب)^7(لا-جہ)^7$

انکے اجزائے ضربی مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں حاصل شدہ نتیجوں کی مدد سے فوراً لکھے جا سکتے ہیں۔ مثال (۱) کی ترقیم استعمال کرنے سے اور مثال ۴۰ صفحہ ۸۲ میں $عہ_1$، $ب_1$، $جہ_1$ کی بجائے $ع$، $و$، $ھ$ درج کرنے سے حسب ذیل اجزائے ضربی حاصل ہونگے:۔

جواب:۔ (۱) ۳ $ع و ھ$، (۲) $\frac{5}{2}(ع^2+و^2+ھ^2)ع و ھ$،
(۳) $\frac{7}{4}(ع^2+و^2+ھ^2)^2 ع و ھ$

۴۔ $(لا-عہ)(لا-ب)(لا-جہ)$
کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرو۔

فرض کرو

$$(لا-عہ)(لا-ب)(لا-جہ)=ع_1^3-و_1^3$$

جس سے

$$ع_1-و_1=ل(لا-عہ)،$$
$$س ع_1-س^2 و_1=م(لا-ب)،$$
$$س^2 ع_1-س و_1=ن(لا-جہ)$$

جمع کرنے سے

$$ل+م+ن=0،\ ل عہ+م ب+ن جہ=0$$

اور اسلئے

$$ل=ک(ب-جہ)،\ م=ک(جہ-عہ)،\ ن=ک(عہ-ب)$$

لیکن $ل م ن=1$، اس لئے

$\frac{1}{\text{ی}^{۲}}$ = (بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ)،

ل، مہ، نہ کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے اور مثال (۱) کی ترمیم استعمال کرنے سے

ع۱ - و۱ = ی ع، سہ ع۱ - سہ۲ و۱ = ی و

سہ۲ ع۱ - سہ و۱ = ی ھ،

اس لئے

۳ ع۱ = ی (ع + سہ۲ و + سہ ھ)

- ۳ و۱ = ی (ع + سہ و + سہ۲ ھ)

اور ع۱ اور و۱ پوری طرح معلوم ہو سکتے ہیں۔

۵ — ثابت کرو کہ ل اور مہ اصلوں کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

ف کی تمام قیمتوں کے لئے

ل = عہ + سہ بہ + سہ۲ جہ = عہ - ف + سہ (بہ - ف) + سہ۲ (جہ - ف)

کیونکہ ۱ + سہ + سہ۲ = ۰ — اب ف کو متواتر عہ، بہ، جہ قیمتیں دینے سے ل کے لئے فرقوں بہ - جہ، جہ - عہ، عہ - بہ کی رقوم میں تین شکلیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح مہ کے لئے۔

۶ — اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

ہم جانتے ہیں کہ

ل + مہ = ۲ عہ - بہ - جہ، ل + سہ۲ مہ = (۲ بہ - جہ - عہ) سہ،

ل + سہ مہ = (۲ جہ - عہ - بہ) سہ۲

اور نیز

ل - مہ = (بہ - جہ) (سہ - سہ۲)، سہ۲ ل - سہ مہ = (جہ - عہ) (سہ - سہ۲)،

سہ ل - سہ۲ مہ = (عہ - بہ) (سہ - سہ۲)

ان سے ہمیں دفعہ ۲۶ کی طرح حاصل ہوگا

ل۳ + مہ۳ = (۲ عہ - بہ - جہ) (۲ بہ - جہ - عہ) (۲ جہ - عہ - بہ)

اور
$$\text{ل}^3 - \text{م}^3 = -3\sqrt{-3}\,(\text{به} - \text{جه})(\text{جه} - \text{عه})(\text{عه} - \text{به})،$$

اور چونکہ
$$(\text{ل}^3 - \text{م}^3)^2 = (\text{ل}^3 + \text{م}^3)^2 - 4\,\text{ل}^3\,\text{م}^3$$

اس لئے $\text{ل}^3 + \text{م}^3$ کی اور $\text{ل}\,\text{م}$ کی قیمتوں کو درج کرنے سے جو دفعہ ۵۹ میں حاصل کیجا چکی ہیں حاصل ہوگا

$$(\text{به} - \text{جه})^2(\text{جه} - \text{عه})^2(\text{عه} - \text{به})^2 = -27(\text{گ}^2 + 4\,\text{ه}^3)$$
(دیکھو دفعہ ۴۲)

۷ — تماثلات ذیل ثابت کرو:—

$$\text{ل}^3 + \text{م}^3 \equiv \frac{1}{3}\{(2\text{عه} - \text{به} - \text{جه})^3 + (2\text{به} - \text{جه} - \text{عه})^3 + (2\text{جه} - \text{عه} - \text{به})^3\}،$$
$$\text{ل}^3 - \text{م}^3 \equiv \sqrt{-3}\{(\text{به} - \text{جه})^3 + (\text{جه} - \text{عه})^3 + (\text{عه} - \text{به})^3\}$$

ل + م وغیرہ، ل - م وغیرہ
کی قیمتوں کو جو مثال ماسبق میں دی گئی ہیں تیسری قوت پر اٹھانے اور جمع کرنے سے ہم بہ آسانی مذکورہ بالا تماثلات حاصل کر سکتے ہیں۔

۸ — عہ، بہ، جہ کے فرقوں کی رقوم میں ل^2، م^2، وغیرہ کے لئے جملے معلوم کرو۔

$(\text{عه} + \text{سه}\,\text{به} + \text{سه}^2\,\text{جه})^2$ اور $(\text{عه} + \text{سه}^2\,\text{به} + \text{سه}\,\text{جه})^2$ میں سے

$$(\text{عه}^2 + \text{به}^2 + \text{جه}^2)(1 + \text{سه} + \text{سه}^2) \equiv 0$$

کو تفریق کرنے سے ل^2 اور م^2 کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:—

$$-\text{ل}^2 = (\text{به} - \text{جه})^2 + \text{سه}^2(\text{جه} - \text{عه})^2 + \text{سه}(\text{عه} - \text{به})^2،$$
$$-\text{م}^2 = (\text{به} - \text{جه})^2 + \text{سه}(\text{جه} - \text{عه})^2 + \text{سه}^2(\text{عه} - \text{به})^2$$

اسی طرح ان جملوں سے ہم حاصل کرینگے

- ل^۴ = (بہ - جہ)^۲ (۲عہ - بہ - جہ)^۲ + سہ (جہ - عہ)^۲ (۲بہ - جہ - عہ)^۲
+ سہ^۲ (عہ - بہ)^۲ (۲جہ - عہ - بہ)^۲ ،

- مر^۴ = (بہ - جہ)^۲ (۲عہ - بہ - جہ)^۲ + سہ^۲ (جہ - عہ)^۲ (۲بہ - جہ - عہ)^۲
+ سہ (عہ - بہ)^۲ (۲جہ - عہ - بہ)^۲ ،

نیز بغیر کسی دقت کے ل مر اور ل^۲ مر^۲ کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہونگے:-

۲ ل مر = (بہ - جہ)^۲ + (جہ - عہ)^۲ + (عہ - بہ)^۲

ل^۲ مر^۲ = (عہ - بہ)^۲ (عہ - جہ)^۲ + (بہ - جہ)^۲ (بہ - عہ)^۲
+ (جہ - عہ)^۲ (جہ - بہ)^۲

٩ـــ ل یا مر کے نمونہ کے چھ تفاعل حسب ذیل ہیں

عہ + سہ بہ + سہ^۲ جہ ، سہ عہ + سہ^۲ بہ + جہ ، سہ^۲ عہ + بہ + سہ جہ ،
عہ + سہ^۲ بہ + سہ جہ ، سہ عہ + بہ + سہ^۲ جہ ، سہ^۲ عہ + سہ بہ + جہ ،

وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ مقداریں ہوں ۔

(117)

ان تفاعلوں کو حسب طریقہ ذیل بیان کیا جا سکتا ہے :-

ل ، سہ ل ، سہ^۲ ل
مر ، سہ مر ، سہ^۲ مر

پس مساوات

(فہ - ل)(فہ - سہ ل)(فہ - سہ^۲ ل)(فہ - مر)(فہ - سہ مر)
(فہ - سہ^۲ مر) = ۰

یا

فہ^۶ - (ل^۳ + مر^۳) فہ^۳ + ل^۳ مر^۳ = ۰

کی اصلیں مندرجۂ بالا مقداریں ہیں ۔

مساواتوں

ل مر = - ۹ھ / ا^۲ ، ل^۳ + مر^۳ = - ۲۷ گ / ا^۳

سے ل اور مر کی بجائے انکی قیمتیں درج کرنے سے ہم اوپر کی مساوات کو سروں کی

رقوم میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$فہ^{۲} + ۳ \frac{گ}{ا^{۲}} فہ^{۳} - ۳^{۲} \frac{ھ^{۳}}{ا^{۲}} = ۰$$

۱۰ــ ل اور م کی رقوم میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں عام کعبی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں -

فرض کرو کہ　　$فہ = (عہ - بہ)^{۲}$

پس قبل الذکر نتیجوں سے

$$\sqrt{-۳ فہ} = سہ ل - سہ^{۲} م$$

اس کو منطق بناؤ تو

$$فہ (فہ - ل م)^{۲} + \frac{(ل^{۳} - م^{۳})^{۲}}{۲۷} = ۰$$

یہ مطلوبہ مساوات ہے -

اسی طرح مثال ۸ کے نتیجوں کی مدد سے اس مساوات کی مربع دار فرقوں کی مساوات یا وہ مساوات جسکی اصلیں ہوں

$(بہ - جہ)^{۲} (۲ عہ - بہ - جہ)^{۲}$، $(جہ - عہ)^{۲} (۲ بہ - جہ - عہ)^{۲}$، $(عہ - بہ)^{۲} (۲ جہ - عہ - بہ)^{۲}$

حاصل ہوتی ہے اگر ہم آخری مساوات میں م اور ل کی بجائے علی الترتیب - $ل^{۲}$ اور - $م^{۲}$ درج کریں اور اس عمل کو جتنی مرتبہ ہم چاہیں دُہرا سکتے ہیں۔

بالآخر یہ سب مساواتیں کعبی کے سروں کی رقوم میں روابط

$$ل م = -۹ \frac{ھ}{ا^{۲}}، \text{ اور } ل^{۳} + م^{۳} = -۲۷ \frac{گ}{ا^{۳}}$$

کی مدد سے بہ آسانی بیان ہو سکتی ہیں - تمثیلاً پہلی مساوات ہوگی

$$فہ (فہ + ۹ \frac{ھ}{ا^{۲}})^{۲} + ۲۷ \frac{گ^{۲} + ۴ ھ^{۳}}{ا^{۶}} = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۴۲) [118]

۱۱ــ اگر کعبی مساوات

$$ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰ ،$$
$$اَ لا^۳ + ۳ بَ لا^۲ + ۳ جَ لا + دَ = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ اور عہَ، بہَ، جہَ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں تفاعل

$$فہ \equiv عہ عہَ + بہ بہَ + جہ جہَ$$

کی چھ قیمتیں ہوں ۔

عمل کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے اِن کعبیوں کے لئے وہ مساواتیں بنائی جائیں جنہیں دوسری رقمیں موجود نہ ہوں یعنے

$$ی^۳ + ۳ ھ ی + گ = ۰ ، یَ^۳ + ۳ ھَ یَ + گَ = ۰$$

اور پھر مطلوبہ مساوات عام صورت میں اِن سے اخذ کیجائے کیونکہ اس طور پر استحالہ شدہ کعبیوں کی صورت میں اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کے جواب میں تفاعل

$$فہ \equiv (ا عہ + ب)(اَ عہَ + بَ) + (ا بہ + ب)(اَ بہَ + بَ)$$
$$+ (ا جہ + ب)(اَ جہَ + بَ) \equiv ا اَ فہ - ۳ ب بَ$$

حاصل ہوگا ۔

استحالہ شدہ مساواتوں کی اصلوں کی بجائے اِن کی قیمتیں جنکو جذروں سے بیان کیا گیا ہے درج کرنے سے

$$فہ = (\sqrt[۳]{ف} + \sqrt[۳]{ق})(\sqrt[۳]{فَ} + \sqrt[۳]{قَ}) + (سہ \sqrt[۳]{ف} + سہ^۲ \sqrt[۳]{ق})(سہ \sqrt[۳]{فَ}$$
$$+ سہ^۲ \sqrt[۳]{قَ}) + (سہ^۲ \sqrt[۳]{ف} + سہ \sqrt[۳]{ق})(سہ^۲ \sqrt[۳]{فَ} + سہ \sqrt[۳]{قَ})$$

جو شکل

$$فہ = ۳ (\sqrt[۳]{ف قَ} + \sqrt[۳]{فَ ق})$$

میں تحویل ہوتا ہے ۔

اِسکا مکعب لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$فہ^۳ - ۲۷ \sqrt[۳]{ف ق فَ قَ}\ فہ - ۲۷ (ف قَ + فَ ق) = ۰$$

اب ف، ق اور ف′، ق′ کی بجائے اِن کی قیمتیں جو مساواتوں

$$\text{لا}^{۲} + \text{گ لا} - \text{ھ}^{۳} = ۰ ،\quad \text{لا}^{۲} + \text{گ}' \text{لا} - \text{ھ}'^{۳} = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں درج کی جائیں تو فہ کی چھ قیمتیں دو کعبی مساواتوں

$$\text{فہ}^{۳} - ۲۷\, \text{ھ ھ}'\, \text{فہ} - \frac{۲۷}{۲}\left(\text{گ گ}' \pm \text{ا ا}'\sqrt{\triangle \triangle'}\right) = ۰$$

سے مل جائیں گی جہاں

$$\text{ا}^{۲} \triangle = \text{گ}^{۲} + ۴\, \text{ھ}^{۳} ، \quad \text{اور} \quad \text{ا}'^{۲} \triangle' = \text{گ}'^{۲} + ۴\, \text{ھ}'^{۳}$$

آخرالامر فہ کی بجائے اس کی قیمت ا ا′ فہ − ۳ ب ب′ درج کرنے سے اور ان دو کعبیوں کو باہم ضرب دینے سے ہمیں مطلوبہ مساوات ملے گی۔ یہ یاد رہے کہ اگر ایک کعبی $\text{لا}^{۳} - ۱ = ۰$ ہو تو $\text{فہ} = \text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{۲} \text{جہ}$ وغیرہ۔ اس صورت پر مثال ۹ میں غور کیا جا چکا ہے۔

۱۲ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ر کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں

$$\text{ر} = \frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{\text{عہ} - \text{جہ}}$$

اور عہ، بہ، جہ مساوات $\text{ا لا}^{۳} + ۳\, \text{ب لا}^{۲} + ۳\, \text{ج لا} + \text{د} = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

چونکہ ر میں عہ، بہ، جہ کے صرف فرق اور ان کی نسبتیں شامل ہیں اسلئے نتیجہ وہی حاصل ہوگا اگر ہم عہ، بہ، جہ کی جگہ مساوات $\text{ی}^{۳} + ۳\, \text{ھ ی} + \text{گ} = ۰$ کی اصلیں $\text{ی}_{۱}$، $\text{ی}_{۲}$، $\text{ی}_{۳}$ رکھیں۔

اس لئے

$$(۲\,\text{ر} - ۱)\, \text{ی}_{۱} = -(\text{ر} + ۱)\, \text{ی}_{۲} ،$$

$$\text{گ} = \text{ی}_{۱} \text{ی}_{۲} (\text{ی}_{۱} + \text{ی}_{۲}) = \frac{(\text{ر} - ۲)(۲\,\text{ر} - ۱)}{(\text{ر} + ۱)^{۲}}\, \text{ی}_{۱}^{۳}$$

اور اسی طرح

$$\text{ھ} = -\frac{(\text{ر}^{۲} - \text{ر} + ۱)}{(\text{ر} + ۱)^{۲}}\, \text{ی}_{۱}^{۲}$$

اِن سے م کو ساقط کر دیا جائے تو مطلوبہ مساوات ملیگی

ھ^{3} { (ر + ۱) (ر - ۲) (۲ر - ۱) }^{2} + گ^{2} (ر^{2} - ر + ۱)^{3} = ۰

۱۳ — کعبیوں

ا لا^{3} + ۳ ب لا^{2} + ۳ ج لا + د = ۰

اَ لا^{3} + ۳ بَ لا^{2} + ۳ جَ لا + دَ = ۰

کے سروں کے درمیان ربط معلوم کرو جبکہ اصلوں میں ربط

عہ (بہَ - جہَ) + بہ (جہَ - عہَ) + جہ (عہَ - بہَ) = ۰

موجود ہو۔

سہ - سہ^{2} سے ضرب دو تو یہ مساوات ہو جائیگی

ل مَ = لَ م

مکعب لیکر سروں کو داخل کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوگی

گ^{2} ھَ^{3} = گَ^{2} ھ^{3}

۱۴ — سروں اور اصلوں کی رقوم میں وہ شرط معلوم کرو کہ مثال ۱۳ کی کعبی مساواتیں خطی استحالہ

لاَ = پ لا + ق

سے مماثل ہو جائیں۔

اس صورت میں

عہَ = پ عہ + ق ، بہَ = پ بہ + ق ، جہَ = پ جہ + ق

پ اور ق کو ساقط کرنے سے

بہ جہَ - بہَ جہ + جہ عہَ - جہَ عہ + عہ بہَ - عہَ بہ = ۰

جو اصلوں کا ایسا تفاعل ہے جس پر مثال ماسبق میں غور کیا جا چکا ہے۔ مزید برآں یہ ربط غیر متغیر رہتا ہے اگر عہ، بہ، جہ، اور عہَ، بہَ، جہَ، کی بجائے

ل عہ + م، ل بہ + م، ل جہ + م،

لَ عہَ + مَ، لَ بہَ + مَ، لَ جہَ + مَ،

(۲۰) درج کئے جائیں ۔ اس لئے ہم مثال ماسبق کی کعبی مساواتوں کو سادہ شکلوں

ی^۳ + ۳ ھ ی + گ = ۰ ، یَ^۳ + ۳ ھَ ی + گَ = ۰

میں غور کر سکتے ہیں جو خطی استحالوں ی = ا لا + ب ، ی = اَ لاَ + بَ سے حاصل ہوتے ہیں ۔ کیونکہ اگر شرط قبل الذکر مساواتوں پر صادق آتی ہے تو بعد الذکر مساواتوں پر بھی صادق آنی چاہیئے ۔

اب رکھو یَ = ک ی تو یہ مساواتیں مماثل ہو جائیں گی اگر

ھَ = ک^۲ ھ ، گَ = ک^۳ گ

ان سے ک کو ساقط کیا جائے تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

گَ^۲ ھ^۳ = گ^۲ ھَ^۳

یہ شرط وہی ہے جو مثال ۱۳ میں حاصل ہوئی تھی ۔ یہ یاد رہے کہ کعبیوں کو تحویل کرنے والے دو درجی اُسی استحالہ یعنے

$$\frac{ھَ}{گَ}(اَ لاَ + بَ) = \frac{ھ}{گ}(ا لا + ب)$$

سے مماثل ہوتے ہیں ۔

۶۰ ۔ کعبی کی دو اصلوں کے درمیان ہم رسم ربط ۔ چار درجی کی بحث شروع کرنے سے پیشتر ہم کعبی کے لئے حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں :-

کعبی کی اصلوں میں سے دو دو اصلوں کے درمیان سروں کی رقوم میں ایک ہم رسم ربط ہوتا ہے ۔

دفعہ ۲۷ کی ۱۳ ویں اور ۱۴ ویں مثالوں سے ہم جانتے ہیں کہ

ا^۲ {(بہ − جہ)^۲ + (جہ − عہ)^۲ + (عہ − بہ)^۲} = ۱۸ (ا^۲_۱ − ا ا_۲) ،

ا^۲ {عہ (بہ − جہ)^۲ + بہ (جہ − عہ)^۲ + جہ (عہ − بہ)^۲} = ۹ (ا_۱ ا_۲ − ا ا_۳) ،

ا^۲ {عہ^۲ (بہ − جہ)^۲ + بہ^۲ (جہ − عہ)^۲ + جہ^۲ (عہ − بہ)^۲} = ۱۸ (ا^۲_۲ − ا_۱ ا_۳) ،

ترقیم

$$ا_1 ا_3 - ا_2^2 \equiv ھ ،\quad ا_1 ا_4 - ا_2 ا_3 \equiv ۲ ھ_1 ،\quad ا_2 ا_4 - ا_3^2 \equiv ھ_2$$

کو استعمال کرنے ، اوپر کی مساواتوں کو علی الترتیب عہ بہ ، -(عہ + بہ) ، ا سے ضرب دینے ، حاصل ضربوں کو جمع کرنے اور اس کا لحاظ رکھنے سے کہ

$$عہ^2 - عہ (عہ + بہ) + عہ بہ \equiv ۰ ،\quad بہ^2 - بہ (عہ + بہ) + عہ بہ \equiv ۰$$

ہمیں حاصل ہوگا

$$ا_0^2 (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)^2 = ۱۸ \{ ھ عہ بہ + ھ_1 (عہ + بہ) + ھ_2 \}$$

لیکن

$$ا_0^4 (بہ - جہ)^2 (جہ - عہ)^2 (عہ - بہ)^2 = -۲۷ \Delta \equiv ۱۰۸ (ھ ھ_2 - ھ_1^2)$$

(دیکھو دفعہ ۴۲)۔ اس لئے

$$\pm \sqrt{-\frac{\Delta}{3}} \left(\frac{عہ - بہ}{۲}\right) = ھ عہ بہ + ھ_1 (عہ + بہ) + ھ_2$$

121)

اور اس لئے

$$ھ عہ بہ + \left(ھ_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta}{3}}\right) عہ + \left(ھ_1 - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta}{3}}\right) بہ + ھ_2 = ۰$$

جو مطلوبہ ہم رسم ربط ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس مساوات کے سروں میں ایک غیر منطق مقدار شامل ہے جس کی دوسری علامت سے اصلوں کے ایک مختلف زوج کے درمیان ہم رسم ربط حاصل ہوگا۔

۶۱ — چار درجی کا پہلا حل جذروں کے ذریعہ — یولر کا مفروضہ۔

فرض کرو کہ چار درجی مساوات

$$ا لا^4 + ۴ ب لا^3 + ۶ ج لا^2 + ۴ د لا + س = ۰$$

کو شکل (دفعہ ۳۷)

$$ی^4 + ۶ ھ ی^2 + ۴ گ ی + ا^2 ع - ۳ ھ^2 = ۰$$

میں لکھا گیا ہے جہاں

$$\text{ی} \equiv \text{ا لا} + \text{ب} ،\quad \text{ھ} \equiv \text{ا ج} - \text{ب}^{۲} ،$$

$$\text{ع} \equiv \text{ا س} - ۴\,\text{ب د} + ۳\,\text{ج}^{۲} ،$$

$$\text{گ} \equiv \text{ا}^{۲}\,\text{د} - ۳\,\text{ا ب ج} + ۲\,\text{ب}^{۳}$$

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے (جسمیں دوسری رقم موجود نہیں ہے) یولر ایک اصل کے لئے حسب ذیل عام جملہ مان لیتا ہے :-

$$\text{ی} = \sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}$$

مربع لینے سے

$$\text{ی}^{۲} - \text{ف} - \text{ق} - \text{ر} = ۲\left(\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} + \sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}\right)$$

پھر مربع لینے اور تحویل کرنے سے ہمیں مساوات حاصل ہوگی

$$\text{ی}^{۴} - ۲(\text{ف} + \text{ق} + \text{ر})\,\text{ی}^{۲} - ۸\,\text{ی}\sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} + (\text{ف} + \text{ق} + \text{ر})^{۲} - ۴(\text{ق ر} + \text{ر ف} + \text{ف ق}) = ۰$$

اس مساوات کا مقابلہ قبل الذکر مساوات سے کیا جائے تو

$$\text{ف} + \text{ق} + \text{ر} = -۳\,\text{ھ} ،\quad \text{ق ر} + \text{ر ف} + \text{ف ق} = ۳\,\text{ھ}^{۲} - \frac{\text{ا}^{۲}\,\text{ع}}{۴} ،$$

$$\sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} = -\frac{\text{گ}}{۲}$$

اور اس لئے ف، ق، ر مساوات

$$\text{ت}^{۳} + ۳\,\text{ھ}\,\text{ت}^{۲} + \left(۳\,\text{ھ}^{۲} - \frac{\text{ا}^{۲}\,\text{ع}}{۴}\right)\text{ت} - \frac{\text{گ}^{۲}}{۴} = ۰ \quad \text{.......(۱)}$$

کی اصلیں ہیں۔ یا چونکہ

$$-\text{گ}^{۲} \equiv ۴\,\text{ھ}^{۳} - \text{ا}^{۲}\,\text{ھ ع} + \text{ا}^{۳}\,\text{جے} ، \quad \text{(دفعہ ۳۷)}$$

جہاں $\text{جے} \equiv \text{ا ج س} + ۲\,\text{ب ج د} - \text{ا د}^{۲} - \text{س ب}^{۲} - \text{ج}^{۳}$

(122)

اسلئے یہ مساوات شکل

$$\text{۴ (ت + ھ)}^{3} - \text{ا}^{2}\,\text{ع (ت + ھ)} + \text{ا}^{3}\,\text{جـ} = 0$$

میں لکھی جا سکتی ہے اور ت + ھ ≡ ا^{2} طہ رکھنے سے بالآخر ہمیں مساوات

$$\text{۴ ا}^{3}\,\text{طہ}^{3} - \text{ع ا طہ} + \text{جـ} = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس کو ہم چار درجی مساوات کا محول کعبی کہینگے اور آئندہ اس کو اسی نام سے موسوم کرینگے۔ جب مساواتوں (۱) اور (۲) میں تمیز پیدا کرنا ضروری ہو جائے تو ہم قبل الذکر مساوات کو یولر کا کعبی کہیں گے۔
نیز چونکہ ت ≡ ب^{2} - اج + ا^{2} طہ اس لئے اگر کعبی کی اصلیں طہ$_{1}$، طہ$_{2}$، طہ$_{3}$ ہوں تو

$$\text{ف} \equiv \text{ب}^{2} - \text{اج} + \text{ا}^{2}\,\text{طہ}_{1}\text{،}\quad \text{ق} \equiv \text{ب}^{2} - \text{اج} + \text{ا}^{2}\,\text{طہ}_{2}\text{،}$$

$$\text{ر} \equiv \text{ب}^{2} - \text{اج} + \text{ا}^{2}\,\text{طہ}_{3}$$

اور اسلئے

$$\text{ی} = \sqrt{\text{ب}^{2} - \text{اج} + \text{ا}^{2}\,\text{طہ}_{1}} + \sqrt{\text{ب}^{2} - \text{اج} + \text{ا}^{2}\,\text{طہ}_{2}} + \sqrt{\text{ب}^{2} - \text{اج} + \text{ا}^{2}\,\text{طہ}_{3}}$$

اگر اس ضابطہ کو ی میں چار درجی مساوات کی ایک اصل قرار دیا جائے تو یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ شامل ہونے والے جذر عام سے عام شکل میں نہیں ہیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ی کی چار قیمتوں کی بجائے آٹھ قیمتیں ضابطہ سے حاصل ہوتیں۔ ٹھیک ٹھیک قید ربط

$$\sqrt{\text{ف}}\,\sqrt{\text{ق}}\,\sqrt{\text{ر}} = -\frac{\text{گ}}{2}$$

سے عاید ہوتی ہے (جس کو مربع لینے میں نظر انداز کر دیا گیا ہے) جس کی بموجب مقداروں $\sqrt{\text{ف}}$، $\sqrt{\text{ق}}$، $\sqrt{\text{ر}}$ میں سے ہر ایک کو ایسی

علامتیں لگانی ہونگی کہ اِن کا حاصل ضرب وہی علامت برقرار رکھ سکے جو اوپر کی مساوات سے متعین ہوتی ہے ۔ اس طرح

$$\sqrt{\text{ف}}\;\sqrt{\text{ق}}\;\sqrt{\text{ر}} = \sqrt{\text{ف}}\,(-\sqrt{\text{ق}})\,(-\sqrt{\text{ر}})$$

$$= (-\sqrt{\text{ف}})\,\sqrt{\text{ق}}\,(-\sqrt{\text{ر}}) = (-\sqrt{\text{ف}})\,(-\sqrt{\text{ق}})\,\sqrt{\text{ر}}$$

مقداروں $\sqrt{\text{ف}}$ ، $\sqrt{\text{ق}}$ ، $\sqrt{\text{ر}}$ کے وہ سب ممکن اجتماع ہیں جو اس شرط کو پورا کرتے ہیں بشرطیکہ $\sqrt{\text{ف}}$ ، $\sqrt{\text{ق}}$ ، $\sqrt{\text{ر}}$ پورے عمل میں وہی علامتیں برقرار رکھیں خواہ یہ علامتیں کچھ بھی ہوں ۔ بہرکیف علامت سے متعلق تمام شکوک کو ہم رفع کر سکتے ہیں اور ی کی چار قیمتوں کو ایک واحد جبری ضابطہ سے بیان کر سکتے ہیں اور یہ اس طرح کہ ی کی مفروضہ قیمت سے متذکرہ بالا ربط کے ذریعہ مقداروں $\sqrt{\text{ف}}$ ، $\sqrt{\text{ق}}$ ، $\sqrt{\text{ر}}$ میں سے کسی ایک کو ساقط کردیا جائے اور باقی دو مقداروں پر علامت کی کوئی قید نہ لگائی جائے ۔ اس لئے ی کے لئے جو جملہ ہے وہ ہو جاتا ہے

(12

$$\text{ی} = \sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} - \frac{\text{گ}}{2\sqrt{\text{ف}}\,\sqrt{\text{ق}}}$$

یہ ضابطہ ایسا ہے جو ہر قسم کے ابہام سے پاک ہے کیونکہ اس سے ی کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ $\sqrt{\text{ف}}$ اور $\sqrt{\text{ق}}$ کو دوہری علامتیں لگادی جائیں ۔ ظاہر ہے کہ پہلی دو مقداروں کو جو علامتیں دیجائینگی اُن کے لحاظ سے تیسری رقم کے نسب نما کی علامت متعین ہو جائیگی ۔ بالآخر ف ، ق اور ی کو اُن کی وہ قیمتیں دینے سے جو اوپر حاصل کی گئی ہیں ہمیں حاصل ہوگا

$$ا\,لا + ب = \sqrt{ب^۲ - اج + ا^۲ طہ_۱} + \sqrt{ب^۲ - اج + ا^۲ طہ_۲} - \frac{گ}{۲\sqrt{ب^۲ - اج + ا^۲ طہ_۱}\sqrt{ب^۲ - اج + ا^۲ طہ_۲}}$$

جو چار درجی مساوات کا مکمل جبری حل ہے جس میں $طہ_۱$ اور $طہ_۲$ مساوات

$$۴\,ا^۳ طہ^۳ - ع\,ا\,طہ + جـ = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

چار درجی کے حل کی شکل سے متعلق یولر کا مذکورۂ بالا بظاہر اختیاری مفروضہ جائز و درست ہے کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ ی میں جو مساوات ہے اس کی دوسری رقم موجود نہ ہونیکی وجہ سے اس کی چار اصلوں کا مجموعہ صفر ہے یعنی $ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + ی_۴ = ۰$ اور اسلئے تفاعل $(ی_۱ + ی_۲)^۲$ وغیرہ جو عام طور پر تعداد میں چھ ہونگے (چار مقداروں میں سے دو دو کے اجتماع) اس صورت میں صرف تین ہیں۔ اس طرح ہم مان سکتے ہیں

$$(ی_۲ + ی_۳)^۲ = (ی_۱ + ی_۴)^۲ = ۴ف،$$

$$(ی_۳ + ی_۱)^۲ = (ی_۲ + ی_۴)^۲ = ۴ق،$$

$$(ی_۱ + ی_۲)^۲ = (ی_۳ + ی_۴)^۲ = ۴ر،$$

جس سے $ی_۱$، $ی_۲$، $ی_۳$، $ی_۴$ ضابطہ

$$\sqrt{ف} + \sqrt{ق} + \sqrt{ر}$$

میں شامل ہو جاتے ہیں۔

اب ہم یولر کے کعبی (۱) کی اصلوں اور نیز محول کعبی (۲) کی اصلونکو (124)

لا میں دئے ہوئے چار درجی کی اصلوں ع، ب، ج، ض کی رقوم میں بیان کرینگے۔ جذروں کی علامتوں کے متعلق جو باتیں اوپر بیان کی گئی ہیں اُن کو پیش نظر رکھکر ہم ی = ا لا + ب کی چار قیمتیں لکھ سکتے ہیں جو حسب ذیل ہیں:-

$$ا\,ع + ب = \sqrt{ف} - \sqrt{ق} - \sqrt{ر} ،$$
$$ا\,ب + ب = -\sqrt{ف} + \sqrt{ق} - \sqrt{ر} ، \qquad (۳)$$
$$ا\,ج + ب = -\sqrt{ف} - \sqrt{ق} + \sqrt{ر} ،$$
$$ا\,ض + ب = \sqrt{ف} + \sqrt{ق} + \sqrt{ر}$$

جن سے یولر کے کعبی کی اصلوں ف، ق، ر کے لئے حسب ذیل جملے فوراً اخذ کئے جا سکتے ہیں:-

$$ف = \frac{ا^۲}{۱۶}(ب + ج - ع - ض)^۲ ،$$
$$ق = \frac{ا^۲}{۱۶}(ج + ع - ب - ض)^۲ ، \qquad (۴)$$
$$ر = \frac{ا^۲}{۱۶}(ع + ب - ج - ض)^۲$$

مساواتوں (۳) میں سے دو دو مساواتیں لیکر عمل تفریق سے اور ف، ق، ر اور $ط_۱$، $ط_۲$، $ط_۳$ کے درمیان مندرجہ بالا ربطوں کو استعمال کرنے سے ہم بہ آسانی حسب ذیل کارآمد ربط حاصل کرتے ہیں جو کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے فرقوں کو چار درجی کی اصلوں کے فرقوں سے ملاتے ہیں:-

$$۴(ق - ر) = ۴ا^۲(ط_۲ - ط_۳) = -ا^۲(ب - ج)(ع - ض) ،$$
$$۴(ر - ف) = ۴ا^۲(ط_۳ - ط_۱) = -ا^۲(ج - ع)(ب - ض) \qquad (۵)$$
$$۴(ف - ق) = ۴ا^۲(ط_۱ - ط_۲) = -ا^۲(ع - ب)(ج - ض)$$

(125)

بالآخر ان مساواتوں سے ربط $طہ_1 + طہ_2 + طہ_3 = 0$ کے ذریعہ ہم $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$ کی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں اخذ کرتے ہیں:-

$$12\ طہ_1 = (جہ - عہ)(بہ - ضہ) - (عہ - بہ)(جہ - ضہ)،$$

$$12\ طہ_2 = (عہ - بہ)(جہ - ضہ) - (بہ - جہ)(عہ - ضہ)،$$

$$12\ طہ_3 = (بہ - جہ)(عہ - ضہ) - (جہ - عہ)(بہ - ضہ)$$

مثالیں

۱ــ جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی دو اصلیں مساوی ہونگی اور بالعکس۔

۲ــ جب چار درجی کی تین اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی سب اصلیں صفر ہونگی اور اس لئے $ع = 0$، $ج = 0$۔

۳ــ جب چار درجی مساوی اصلوں کے دو علحدہ جوڑے رکھتا ہو تو یولر کے کعبی کی اصلیں صفر ہوتی ہیں اور اسلئے

$$گ = 0،\ ا^2 ع - 12 ھ^2 = 0.$$

۴ــ اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے چار درجی اور یولر کے کعبی کے درمیان روابط ذیل ثابت کرو:-

(۱) جب چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو یولر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی۔

(۲) جب چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہوں تو یولر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی جنمیں سے دو منفی اور ایک مثبت ہوگی۔

(۳) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں تو یولر کے کعبی کی دو اصلیں خیالی اور ایک اصل مثبت اور حقیقی ہوگی۔

یہ نتیجے مساواتوں (۴) سے بہ آسانی حاصل ہوتے ہیں اگر ف، ق، ر کی قیمتوں میں عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے مناسب مختلفیں درج کیجائیں۔ یہ یاد رہے کہ یہاں تمام ممکن صورتیں بیان کردی گئی ہیں اور چار درجی کے متعلق یہ فرض کیا گیا ہے کہ

اس کی اصلیں مساوی نہیں ہیں۔ ان میں سے ہر مسئلہ کا عکس بھی درست ہے پس جب یولر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہوں تو ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہیں اور جب یولر کے کعبی کی اصلیں منفی ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہیں اور جب یولر کے کعبی کی اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۵ — ثابت کرو کہ چار درجی کی اصلوں اور محول کعبی کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط موجود ہوتے ہیں:۔

(۱) اگر چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب کی سب خیالی تو محول کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور اس کے برعکس جب محول کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو چار درجی کی اصلیں یا تو سب کی سب حقیقی ہونگی یا سب کی سب خیالی۔

(۲) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں تو محول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی اور اس کے برعکس جب محول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

یہ نتیجے مثال سابق سے فوراً اخذ ہو سکتے ہیں کیونکہ کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے درمیان ایک حقیقی خطی ربط موجود ہوتا ہے۔

۶ — جب ھ مثبت ہو تو چار درجی خیالی اصلیں رکھیگا۔

کیونکہ ایسی صورت میں یولر کے کعبی کی سب اصلیں مثبت نہیں ہو سکتیں۔

۷ — جب ع منفی ہو تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

کیونکہ ایسی صورت میں محول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی (مثال ۲ صفحہ ۱۴۴)

۸ — جب ھ اور جے دونوں مثبت ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہونگی۔

کیونکہ جے مثبت ہونے کی وجہ سے محول کعبی کی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی۔ اسلئے یولر کے کعبی کی بھی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی اس وجہ سے کہ ت = ۴ ط - ھ اور ھ مثبت ہے۔ یہ مثال (۴) کی صورت (۲) ہے۔

(126)

اِس ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ پہلا سر ا مثبت ہے۔ اگر جے کی بجائے ا جے مسئلہ بالا میں درج کیا جائے تو ا پر کسی علامت کی قید لگانا ضروری نہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ دو چار درجی مساواتوں

$$ا_. لا^۴ + ۶ ا_۲ لا^۲ \pm ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$$

کا محول کعبی ایک ہی ہے۔

۱۰۔ دو چار درجی مساواتوں

$$لا^۴ - ۶ ل لا^۲ \pm ۸ لا \sqrt{ل^۳ + م^۳ + ن^۳ - ۳ ل م ن} + ۳(۴ م ن - ل^۲) = ۰$$

کا محول کعبی معلوم کرو۔

جواب:۔ $ط^۳ - ۳ م ن ط - (م^۳ + ن^۳) = ۰$

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\{لا^۴ - ۶ ل لا^۲ + ۳(۴ م ن - ل^۲)\}^۲ = ۶۴ (ل^۳ + م^۳ + ن^۳ - ۳ ل م ن) لا^۲$$

کی آٹھ اصلیں ضابطہ

$$\sqrt{ل + م + ن} + \sqrt{ل + س م + س^۲ ن} + \sqrt{ل + س^۲ م + س ن}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ (مثال ۲۰ صفحہ ۴۴ کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

۱۲۔ اگر مساوات

$$ی^۴ + ۶ ھ ی^۲ + ۴ گ ی + ا^۲ ع - ۳ ھ^۲ = ۰$$

کی ایک اصل

$$\sqrt{ل + م + ن} + \sqrt{ل + س م + س^۲ ن} + \sqrt{ل^۲ + س^۲ م + س ن}$$

ہو تو ل، م، ن کی رقوم میں ھ، ع، جے معلوم کرو۔

جواب:۔ $ھ = - ل$، $ا^۲ ع = ۱۲ م ن$، $ا^۳ جے = -۴ (م^۳ + ن^۳)$

۱۳ــ وہ ضابطے لکھو جو چار درجی کی اصل کو خاص صورتوں ع = ۰ اور جے = ۰ میں بیان کریں ـ

۱۴ــ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں محول کعبی کی مدد سے ع اور جے کو بیان کرو ـ (دیکھو دفعہ ۲۷، مثالیں ۱، ۲)

۱۵ــ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو ع اور جے کی رقوم میں بیان کرو ـ

مندرجۂ بالا مساواتوں (۵) اور مساوات (۲) صفحہ ۱۱۷ کی مدد سے ہم مطلوبہ حاصل ضرب حاصل کرتے ہیں ـ

$$ا_۰^۶ (بہ - جہ)^۲ (جہ - عہ)^۲ (عہ - بہ)^۲ (عہ - ضہ)^۲ (بہ - ضہ)^۲ (جہ - ضہ)^۲$$

$$= ۲۵۶ (ع^۳ - ۲۷ جے^۲)$$

۱۶ــ اصل کو بیان کرنیوالے جملہ میں آخری جذر المربع کی علامت ہیں (یعنی اس علامت جذر میں جو محول کعبی کے حل میں جذر الکعب میں واقع ہوتا ہے) کونسی مقدار آئے

جواب:ــ $۲۷ جے^۲ - ع^۳$

۱۷ــ ثابت کرو کہ چار درجی مساوات

$$ا_۰ لا^۴ + ۴ ا_۱ لا^۳ + ۶ ا_۲ لا^۲ + ۴ ا_۳ لا + ا_۴ = ۰$$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات کے سر $ا_۰$، ھ، ع اور جے کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں ـ

مساوات سے دوسری رقم خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ا^۴ + \frac{۶ ھ}{ا_۰^۲} ا^۲ + \frac{۴ گ}{ا_۰^۳} ا + \frac{ا_۰^۲ ع - ۳ ھ^۲}{ا_۰^۴} = ۰$$

اور اصلوں کی علامتیں بدلنے سے

$$ا^۴ + \frac{۶ ھ}{ا_۰^۲} ا^۲ - \frac{۴ گ}{ا_۰^۳} ا + \frac{ا_۰^۲ ع - ۳ ھ^۲}{ا_۰^۴} = ۰$$

(127)

اِن استحالوں سے تفاعلوں (عہ ـ بہ^{2})، وغیرہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لیکن موخرالذکر مساوات میں گ ، گ ہو جاتا ہے اور اس کے دوسرے سر غیر متغیر رہتے ہیں۔ اس لئے مربع دار فرقوں کی مساوات کے سروں میں گ صرف جفت قوتوں میں داخل ہو سکتا ہے ۔ اور دفعہ ۷۳ کی متماثلہ مساوات کی مدد سے گ^{2} ساقط کیا جا سکتا ہے اور ا، ع، ھ، ج داخل کئے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کا ہر جفت تفاعل ا، ھ، ع، ج کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور اس میں گ طاق قوتوں [illegible] نہیں ہوتا۔

۶۲ــــ جذروں کے ذریعہ چار درجی کا دوسرا حل ـ فرض کرو کہ

چار درجی مساوات

ا لا^{4} + ۴ ب لا^{3} + ۶ ج لا^{2} + ۴ د لا + س = ۰

حسب سابق شکل

ی^{4} + ۶ ھ ی^{2} + ۴ گ ی + ا^{2}ع ـ ۳ ھ^{2} = ۰

میں رکھی گئی ہے جہاں ی ≡ ا لا + ب

اس مساوات کی اصل کے لئے اب ہم جملہ

ی = $\sqrt{}$ق $\sqrt{}$ر + $\sqrt{}$ر $\sqrt{}$ف + $\sqrt{}$ف $\sqrt{}$ق

فرض کرتے ہیں جسمیں تین غیر تابع جذر $\sqrt{}$ف، $\sqrt{}$ر، $\sqrt{}$ق شامل ہیں۔

دو مرتبہ مربع لینے سے اور تحویل کرنے سے

(ی^{2} ـ ق ر ـ ر ف ـ ف ق)^{2} = ۴ ف ق ر (۲ ی + ف + ق + ر)

یا ی^{4} ـ ۲ (ق ر + ر ف + ف ق) ی^{2} ـ ۸ ف ق ر ی

+ (ق ر + ر ف + ف ق)^{2} ـ ۴ (ف + ق + ر) ف ق ر = ۰

اس مساوات کا مقابلہ ی کی قبل الذکر مساوات کے ساتھ کیا جائے تو

$$\text{ق ر} + \text{ر ف} + \text{ف ق} = -۳\,\text{ھ}\text{، ف ق ر} = -\frac{\text{گ}}{۲}\text{،}$$

$$\text{ف} + \text{ق} + \text{ر} = \frac{\text{اُ}^{۲}\,\text{ع} - ۱۲\,\text{ھ}^{۲}}{۲\,\text{گ}}\text{،}$$

جس سے ظاہر ہے کہ ف، ق، ر مساوات

$$۲\,\text{گ ت}^{۳} + (۱۲\,\text{ھ}^{۲} - \text{اُ}^{۲}\,\text{ع})\,\text{ت}^{۲} - ۶\,\text{ھ گ ت} + \text{گ}^{۲} = ۰$$

کی اصلیں ہیں ۔ (128)

اس مساوات کو بہ آسانی یولر کے کعبی میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ یا بلاواسطہ

$$\text{ت} = \frac{\text{گ}^{\frac{۱}{۲}}}{\text{ھ} - \text{اُ}^{۲}\,\text{ط}}$$

کے اندراج سے اور گ² کی بجائے اس کی قیمت ھ، ع، جے کی رقوم میں رکھنے سے ہم اس کو محول کعبی کی معیاری شکل یعنی شکل

$$۴\,\text{اُ}^{۳}\,\text{ط}^{۳} - \text{ع اُ ط} + \text{جے} = ۰$$

میں تحویل کر سکتے ہیں ۔

حل کے اس طریقہ میں ہمیں کسی ایسے ابہام سے جو دفعہ ۶۱ میں واقع ہوا تھا واسطہ نہیں پڑتا ۔ کیونکہ ی کی قیمت کے طور پر جو جملہ یہاں مان لیا گیا ہے اس کی صرف چار قیمتیں ہیں حالانکہ دفعہ ماسبق میں ی کے لئے جو شکل اختیار کی گئی تھی اسکی آٹھ قیمتیں تھیں ۔ یہ بات اسوجہ سے ہے کہ شامل ہونے والے جذر دوہری علامت رکھتے ہیں متماثل مساوات

$$۲(\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} + \sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}})$$

$$\equiv (\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}})^{۲} - \text{ف} - \text{ق} - \text{ر}$$

سے یہ امر بالکل واضح ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس دفعہ کے جذری جملہ کی قیمتوں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنی $(\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}})^{۲}$ کی قیمتوں کی

یعنی چار۔

چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں ف، ق، ر کو بیان کرنیکے لئے لا کو یہ چار قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ دینے سے

$$\text{ی}_1 \equiv \text{ا}\,\text{عہ} + \text{ب} = \sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} - \sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{ف}} - \sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}$$

$$\text{ی}_2 \equiv \text{ا}\,\text{بہ} + \text{ب} = -\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} + \sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{ف}} - \sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}$$

$$\text{ی}_3 \equiv \text{ا}\,\text{جہ} + \text{ب} = -\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} - \sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}$$

$$\text{ی}_4 \equiv \text{ا}\,\text{ضہ} + \text{ب} = \sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}} + \sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}$$

طالب علم بہ آسانی اس امر کا اطمینان کرسکتا ہے کہ جذروں کی علامتوں کا کوئی اور اجتماع ایسا نہیں ہے جس سے ان چار قیمتوں کے علاوہ کوئی مختلف قیمت حاصل ہو۔

$\text{ی}_2 + \text{ی}_3 - \text{ی}_1 - \text{ی}_4$ اور $\text{ی}_2\,\text{ی}_3 - \text{ی}_1\,\text{ی}_4$ کی قیمتوں سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ا}\,(\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}) = -۴\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}}$$

$$\text{ا}^2(\text{بہ}\,\text{جہ} - \text{عہ}\,\text{ضہ}) + \text{ا}\,\text{ب}\,(\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}) = ۴\,\text{ف}\sqrt{\text{ق}}\sqrt{\text{ر}}$$

ان سے اور ان سے مشابہ مساواتیں استعمال کرنے سے ربط $\text{گ} = -۲\,\text{ف}\,\text{ق}\,\text{ر}$ (129) کے ذریعہ ہم ف، ق، ر کو اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں حسب ذیل طریقوں پر بیان کرسکتے ہیں:-

$$-\text{ف} = \text{ا}\,\frac{\text{بہ}\,\text{جہ} - \text{عہ}\,\text{ضہ}}{\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}} + \text{ب} = \frac{۸\,\text{گ}}{\text{ا}^2(\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^2}\text{،}$$

$$-\text{ق} = \text{ا}\,\frac{\text{جہ}\,\text{عہ} - \text{بہ}\,\text{ضہ}}{\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}} + \text{ب} = \frac{۸\,\text{گ}}{\text{ا}^2(\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ})^2}\text{،}$$

$$- ر = ا \frac{عہ بہ - جہ ضہ}{عہ + بہ - جہ - ضہ} + ب = \frac{۸ گ}{ا^{۲}(عہ + بہ - جہ - ضہ)^{۲}}$$

۶۳ — چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔

فرض کرو کہ چار درجی

$$ا لا^{۴} + ۴ ب لا^{۳} + ۶ ج لا^{۲} \pm ۴ د لا + س$$

کو دو مربعوں کے فرق[1] کی شکل یعنی شکل

$$(ا لا^{۲} + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ)^{۲} - (۲ مہ لا + ن)^{۲}$$

میں بیان کیا گیا ہے۔

دئے ہوئے چار درجی کو ا سے ضرب دو اور اس جملہ کے ساتھ اسکا مقابلہ کرو تو ذیل کی مساواتیں مقداروں مہ، ن، اور طہ کو متعین کرنیکے لئے حاصل ہونگی۔

$$مہ^{۲} = ب^{۲} - ا ج + ا^{۲} طہ، \quad مہ ن = ب ج - ا د + ۲ ا ب طہ،$$

$$ن^{۲} = (ج + ۲ ا طہ)^{۲} - ا س$$

اِن مساواتوں سے مہ اور ن کو ساقط کرو تو

$$۴ ا^{۳} طہ^{۳} - (ا س - ۴ ب د + ۳ ج^{۲}) ا طہ + ا ج س + ۲ ب ج د$$
$$- ا د^{۲} - س ب^{۲} - ج^{۳} = ۰$$

جو وہی محوّل کعبی ہے جسکو پہلے حاصل کیا جاچکا ہے۔

---

[1] چار درجی کو دو مربعوں کے فرق میں تحویل کرنا سب سے پہلا طریقہ تھا جو درجہ چہارم کی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا گیا تھا۔ حل کا یہ طریقہ فیراری (Ferrari) نے دریافت کیا تھا۔ اگرچہ بعض مصنف اس کو سمپسن (Simpson) سے منسوب کرتے ہیں۔ (دیکھو نوٹ ا)۔

دفعہ آیندہ میں جو طریقہ بیان کیا گیا ہے اسمیں چار درجی کو بالراست دو درجی اجزائے کے حاصل ضرب کے مساوی رکھا گیا ہے۔ یہ طریقہ ڈیکارٹ کا طریقہ ہے۔

اِس مساوات سے طہ کی تین قیمتیں (طہ۱ ، طہ۲ ، طہ۳) ملتی ہیں جن کے جواب میں مہ^۲ ، مہ ن ، ن^۲ کی تین قیمتیں ملیں گی ۔ پس چار درجی کی مفروضہ شکل کے تمام سر تین جداگانہ طریقوں سے متعین ہوتے ہیں ۔ مزید بریں یہ ظاہر ہے کہ مہ کی ہر قیمت کے جواب میں ن کی ایک واحد قیمت ملتی ہے کیونکہ

مہ ن = ب ج ـ ا د + ۲ ا ب طہ

چار درجی

(ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ)^۲ ـ (۲ مہ لا + ن)^۲

کو صریحاً دو دو درجی اجزائے ضربی

ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ ـ ۲ مہ لا ـ ن ،

اور ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ + ۲ مہ لا + ن

یعنے

ا لا^۲ + ۲ (ب ـ مہ) لا + ج + ۲ ا طہ ـ ن ،

اور ا لا^۲ + ۲ (ب + مہ) لا + ج + ۲ ا طہ + ن

میں تحلیل کیا جا سکتا ہے ۔ اگر طہ کو اس کی تین قیمتیں طہ۱ ، طہ۲ ، طہ۳ دیجائیں تو ابتدائی چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے تین زوج حاصل ہوتے ہیں اور مسئلہ بالکلیہ حل ہو جاتا ہے ۔

اِس حل اور جذروں والے حل میں جو تعلق ہے اسکو واضح کرنیکے لئے فرض کرو کہ مندرجہ بالا ترتیب میں لکھے ہوئے دو درجی اجزائے ضربی کی اصلیں بہ ، جہ اور عہ ، ضہ ہیں اور یہ کہ دو درجی اجزا کے بقیہ زوجوں کی اصلیں اسیطرح جہ ، عہ اور بہ ، ضہ ؛ عہ ، بہ اور جہ ، ضہ ہیں تو

بہ + جہ = ـ ۲/ا (ب ـ مہ۱) ، جہ + عہ = ـ ۲/ا (ب ـ مہ۲) ، عہ + بہ = ـ ۲/ا (ب ـ مہ۳) ،

عہ + ضہ = ـ ۲/ا (ب + مہ۱) ، بہ + ضہ = ـ ۲/ا (ب + مہ۲) ، جہ + ضہ = ـ ۲/ا (ب + مہ۳) ،

جہاں

$$\text{م}_1 = \sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\,\text{ط}_1}\,،\quad \text{م}_2 = \sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\,\text{ط}_2}\,،$$

$$\text{م}_3 = \sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\,\text{ط}_3}\,،$$

ان آخری مساواتوں میں سے دو دو مساواتیں لیکر ایک کو دوسرے میں سے تفریق کیا جائے تو

$$\text{به} + \text{جه} - \text{عه} - \text{ضه} = ۴\frac{\text{م}_1}{\text{ا}}\,،\quad \text{جه} + \text{عه} - \text{به} - \text{ضه} = ۴\frac{\text{م}_2}{\text{ا}}\,،$$

$$\text{عه} + \text{به} - \text{جه} - \text{ضه} = ۴\frac{\text{م}_3}{\text{ا}}\,،$$

اور چونکہ

$$\text{عه} + \text{به} + \text{جه} + \text{ضه} = -۴\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

اسلئے

$$\text{ا عه} + \text{ب} = -\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3\,،$$
$$\text{ا به} + \text{ب} = \text{م}_1 - \text{م}_2 + \text{م}_3\,،$$
$$\text{ا جه} + \text{ب} = \text{م}_1 + \text{م}_2 - \text{م}_3\,،$$
$$\text{ا ضه} + \text{ب} = -\text{م}_1 - \text{م}_2 - \text{م}_3$$

(131) اِس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ چار درجی کی اصلیں یہاں ایسے ضابطوں سے علیحدہ علیحدہ بیان ہوئی ہیں جو دفعہ ۱۲۱ کے ضابطوں کے مماثل ہیں۔ م^2 کی قیمتیں یعنی م_1^2، م_2^2، م_3^2 فی الحقیقت یولر کے کعبی کی اصلوں کے مماثل ہیں۔ نیز م_1، م_2، م_3 میں شامل ہونیوالے جذروں کی علامتوں پر ایسی قید موجود ہے جو دفعہ ۱۲۱ میں عائد کردہ قید کے مشابہ ہے۔ کیونکہ دو درجی اجزائے ضربی کی اصلوں کے لحاظ سے جو مفروضات اوپر تسلیم کئے گئے ہیں

اُن کی وجہ سے ہمیں مساوات

$ا^۲ (بہ + جہ - عہ - ضہ)(جہ + عہ - بہ - ضہ)(عہ + بہ - جہ - ضہ) = ۶۴ م_۱ م_۲ م_۳$،

ملتی ہے جو ربط ذیل کو مستلزم ہے (دیکھو مثال ۲۰ صفحہ ۳ ")

$$م_۱ م_۲ م_۳ = \frac{۱}{۲} گ$$

اور اس ربط کے ذریعہ $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ کی علامتیں مقید ہوتی ہیں جیسا کہ دفعہ ماسبق میں واضح کیا جا چکا ہے۔

اس آخری مساوات کی مدد سے ہم $م_۳$ کو اصلوں کے جملوں سے ساقط کر سکتے ہیں اور اس طرح چار درجی کی سب اصلوں کو (جیسا کہ دفعہ ۶۱ میں کیا گیا) ایک واحد ضابطہ میں یعنی

$$ا لا + ب = م_۱ + م_۲ - \frac{گ}{۲ م_۱ م_۲}$$

میں حاصل کرتے ہیں جسمیں جذور

$م_۱ = \sqrt{ب^۲ - ا ج + ا^۲ طہ_۱}$ اور $م_۲ = \sqrt{ب^۲ - ا ج + ا^۲ طہ_۲}$

پوری عمومیت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں لہ، مہ، نہ ہوں یعنی

بہ جہ + عہ ضہ، جہ عہ + بہ ضہ، عہ بہ + جہ ضہ

چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے آخری سروں کو جمع کرنے سے

$$بہ جہ + عہ ضہ = ۴ طہ_۱ + ۲ \frac{ج}{ا}،$$

$$جہ عہ + بہ ضہ = ۴ طہ_۲ + ۲ \frac{ج}{ا}،$$

$$عہ بہ + جہ ضہ = ۴ طہ_۳ + ۲ \frac{ج}{ا}$$

جہاں طہ۱، طہ۲، طہ۳ محول کعبی کی اصلیں ہیں۔ پس مطلوبہ مساوات حاصل ہو جائیگی
(دیکھو دفعہ ۹۳، مثالیں ۴، ۵)۔

جواب:- (ا لا - ۲ ج)^۳ - ۴ ع (ا لا - ۲ ج) + ۱۶ ا ے = ۰

(182) ۲ ــ مثال ماسبق کی مساواتوں کے ذریعہ محول کعبی کی اصلوں کو چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں بیان کرو۔

$\frac{۲ ج}{ا}$ کی بجائے اسکی قیمت عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں درج کرنے سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ

۱۲ طہ۱ = ۲ لہ - مہ - نہ ≡ (جہ - عہ)(بہ - ضہ) - (عہ - بہ)(جہ - ضہ)،

۱۲ طہ۲ = ۲ مہ - نہ - لہ ≡ (عہ - بہ)(جہ - ضہ) - (بہ - جہ)(عہ - ضہ)،

۱۲ طہ۳ = ۲ نہ - لہ - مہ ≡ (بہ - جہ)(عہ - ضہ) - (جہ - عہ)(بہ - ضہ)

۳ ــ مثال (۱) میں طہ۱، طہ۲، طہ۳ کے لئے جو جملے حاصل ہوئے ہیں اُنکے ذریعہ دفعہ ۱۶۱ مثال ۵ کے اُن نتیجوں کی تصدیق کرو جن سے چار درجی اور محول کعبی کی اصلیں مربوط ہوتی ہیں۔

۴ ــ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$\frac{1}{8}$ (بہ جہ - عہ ضہ)(بہ + جہ - عہ - ضہ)، $\frac{1}{8}$ (جہ عہ - بہ ضہ)(جہ + عہ - بہ - ضہ)،

$\frac{1}{8}$ (عہ بہ - جہ ضہ)(عہ + بہ - جہ - ضہ)

چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی سے ہم معلوم کرتے ہیں

$\frac{۴ م۱}{ا} = بہ + جہ - عہ - ضہ$، $-\frac{۲ ن۱}{ا} = بہ جہ - عہ ضہ$

نیز م۱ ن۱ = ب ج - ا د + ۲ ا ب طہ۱ = - ا^۲ فہ۱

جہاں مطلوبہ کعبی کی اصلیں فہ۱، فہ۲، فہ۳ سے تعبیر کی گئی ہیں۔

اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک خطی استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔

جواب:- (ا^۲ فہ + ب ج - ا د)^۳ - ب^۲ ع (ا^۲ فہ + ب ج - ا د) - ۲ ب^۳ ے = ۰

۵ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہیں

$$\frac{بہ\,جہ - عہ\,ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ}\ ،\ \frac{جہ\,عہ - بہ\,ضہ}{جہ + عہ - بہ - ضہ}\ ،\ \frac{عہ\,بہ - جہ\,ضہ}{عہ + بہ - جہ - ضہ}$$

اگر فہ ان میں سے کسی تفاعل کو بلا امتیاز تعبیر کرے اور اس کے جواب میں محول کعبی کی اصل طہ سے تعبیر ہو تو پچھلے نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$-۲\,فہ = \frac{مہ\,ن}{مہ_۲} = \frac{ب\,ج - ا\,د + ۲\,ا\,ب\,طہ}{ب^۲ - ا\,ج + ا^۲\,طہ}$$

اور اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک ہم رسم استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔ اس ضابطہ کو زیادہ سہولت بخش شکل

$$ا\,فہ + ب = \frac{\frac{۱}{۲}\,گ}{ا^۲\,طہ - ھ}$$

میں رکھا جاسکتا ہے جسکے ذریعہ مطلوبہ کعبی شکل ذیل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$۲\,گ\,(ا\,فہ + ب)^۳ + (ا^۲\,ع - ۱۲\,ھ^۲)(ا\,فہ + ب)^۲$$

$$-۶\,ھ\,گ\,(ا\,فہ + ب) - گ^۲ = ۰$$

جس کو پھیلا کر $ا^۲$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ا\,گ\,فہ^۳ + (ا^۲\,س + ۲\,ب^۲\,ج - ۹\,ا\,ج^۲ + ۲\,ا\,ب\,د)\,فہ^۲ + ۲\,(ا\,ب\,س$$

$$+ ۲\,ب^۲\,د - ۳\,ا\,ج\,د)\,فہ + ب^۲\,س - ا\,د^۲ = ۰$$

(دیکھو مثال ۱۴ صفحہ ۱۲۰)

33)

۶ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہیں

$$\frac{ا^۲}{۴}(بہ\,جہ - عہ\,ضہ)^۲\ ،\ \frac{ا^۲}{۴}(جہ\,عہ - بہ\,ضہ)^۲\ ،\ \frac{ا^۲}{۴}(عہ\,بہ - جہ\,ضہ)^۲$$

یہ $ن^۲$ کی تین قیمتیں ہیں دیکھو دفعہ ۶۳ - پہلے کی طرح انہیں سے کسی قیمت کو فہ سے تعبیر کیا جائے تو مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رسم استحالہ

$$ف = \frac{۲ ب ج د - ا د^۲ - س ب^۲ + ۴ ا ب د ط}{ج - ا ط}$$

کے ذریعہ حاصل ہوسکتی ہے۔

۷۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\frac{به جه - عه ضه}{(به + جه) عه ضه - (عه + ضه) به جه}،\quad \frac{جه عه - به ضه}{(جه + عه) به ضه - (به + ضه) جه عه}،$$

$$\frac{عه به - جه ضه}{(عه + به) جه ضه - (جه + ضه) عه به}$$

مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رسم استحالہ

$$۲ ف = \frac{ج د - ب س + ۲ ا د ط}{د^۲ - ج س + ا س ط}$$

کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے۔

اس نتیجہ کو مثال ۵ سے اخذ کیا جا سکتا ہے وہ اس طرح کہ اصلوں کو ان کے تکافیوں میں تبدیل کیا جائے اور اس تبدیلی کے جواب میں سروں میں تبدیلیاں عمل میں لائی جائیں۔

۶۴۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ دوسرا طریقہ

فرض کرو کہ چار درجی

$$ا لا^۴ + ۴ ب لا^۳ + ۶ ج لا^۲ + ۴ د لا + س$$

کو دو درجی اجزائے ضربی

$$ا (لا^۲ + ۲ ف لا + ق) (لا^۲ + ۲ فَ لا + قَ)$$

میں تحلیل کیا گیا ہے۔ ان دو شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

$$\left.\begin{array}{l} ف + فَ = ۲ \frac{ب}{ا}،\quad ق + قَ + ۴ ف فَ = ۶ \frac{ج}{ا} \\ ف قَ + فَ ق = ۲ \frac{د}{ا}،\quad ق قَ = \frac{س}{ا} \end{array}\right\} \quad ....(۱)$$

اب اگر ہمارے پاس شکل

$$\text{فا}\,(\text{ف}،\ \text{ق}،\ \text{فَ}،\ \text{قَ}) = \text{فہ}$$

کی کوئی پانچویں مساوات ہوتی تو ہم ف، فَ، ق، قَ کو ساقط کر سکتے
اور اس طرح ایسی مساوات معلوم کر سکتے جس سے فہ کی مختلف قیمتیں حاصل
ہوتیں۔

اس پانچویں مساوات کا ف فَ = فہ یا ق + قَ = فہ ہونا مان لیا جا سکتا
ہے جہاں ہر صورت میں فہ ایک کعبی مساوات سے معلوم ہوگا کیونکہ ایسے
ہر تفاعل کی صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ان کو چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں
بیان کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ فرض کرنا کہ

$$\text{فہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \text{ف فَ} = \frac{1}{4}\left(\text{ق} + \text{قَ} - \frac{2\,\text{ج}}{\text{ا}}\right)$$

زیادہ سہولت بخش ہے۔ ف، فَ، ق، قَ کے یہ دو تفاعل مساواتوں (۱)
میں سے دوسری مساوات کی رو سے مساوی ہیں۔ اِن مساواتوں کی مدد سے
ہم بہ آسانی یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$\text{ف قَ} + \text{فَ ق} = \frac{4\,\text{ا ب ج} - 2\,\text{ا}^2\text{د}}{\text{ا}^3} + \frac{8\,\text{ب فہ}}{\text{ا}}$$

اور متماثل ربط

$$(\text{ف}^2 + \text{فَ}^2)(\text{ق}^2 + \text{قَ}^2) \equiv (\text{ف قَ} - \text{فَ ق})^2 + (\text{ف ق} + \text{فَ قَ})^2$$

کے ذریعہ ف، فَ، ق، قَ کو ساقط کرنے سے مساوات

$$4\,\text{ا}^3\,\text{فہ}^3 - \text{ع}\,\text{ا}\,\text{فہ} + \text{ح} = 0$$

برآمد ہوتی ہے جو وہی محول کعبی ہے جسے حل کے پچھلے طریقوں سے حاصل کیا گیا تھا۔

اس طریقہ سے ف فَ یا ق + قَ کو معلوم کرنے کے بعد ہم مساواتوں
(۱) کے ذریعہ چار درجی کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے عمل کی تکمیل کر سکتے ہیں۔

پانچویں مساوات کی شکل کے متعلق جو مفروضہ ہم نے اوپر اختیار کیا
ہے اس کی وجہ ظاہر ہے۔ فہ کی مفروضہ قیمتوں کا دفعہ ۳۶ مثال (۱) کی

134)

مساواتوں کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ فہ وہی ہے جو
طہ دفعہ ماسبق میں تھا۔ اور اس لئے ہم یہ پیش بینی کرتے ہیں کہ ف، فَ، قَ، ق
کے اسقاط سے فہ میں ایسی مساوات حاصل ہونی چاہئے جو حاصل کردہ محول کعبی
کے مماثل ہو۔ عام طور پر اگر فہ سے ل، مہ، نہ کے فرقوں کا کوئی تفاعل
تعبیر ہو جسکا لازمی نتیجہ یہ ہوگا کہ اس سے عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کا ایک جفت
تفاعل تعبیر ہوگا (دیکھو دفعہ ۲۷ مثال ۱۸) تو وہ مساوات جس کی اصلیں فہ کی
مختلف قیمتیں ہوں ایسی ہوگی کہ اس کے سر ا، ھ، ع اور جے کے تفاعل
ہونگے۔

اگر فہ حسب ذیل مثالوں میں سے دوسری مثال کے جملوں میں سے کسی
ایک کے مساوی فرض کیا جائے تو فہ میں وہ مساوات جسکی اصلیں اس جملہ کی مختلف
قیمتیں ہوں حسب شرح بالا ف، فَ، ق، قَ کے ساقط کرنے سے
حاصل ہوگی۔

(135)

مثالیں

۱۔ $ی^4 + ۶ ھ ی^2 + ۴ گ ی + ا^2 ع - ۳ ھ^2$

کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

اس شکل کا حاصل ضرب

$(ی^2 + ۲ ف ی + ق)(ی^2 - ۲ ف ی + قَ)$

کے ساتھ مقابلہ کرو تو ف کے لئے حسب ذیل مساوات ملیگی:-

$$۴ ف^6 + ۱۲ ھ ف^4 + ۱۲ \left(ھ^2 - \frac{ا^2 ع}{۱۲}\right) ف^2 - گ^2 = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۶۱)

اور

$$ا^2 فہ = ف^2 + ھ = \frac{۱}{۴}(ق + قَ - ۲ ھ)$$

رکھنے سے یہ مساوات، $ا^۳$ سے تقسیم کرنیکے بعد، ہو جائیگی

$$۴ ا^۳ ف^۳ - ع ا ف + ج = ۰.$$

۲۔ اگر ایک چار درجی جملہ کو دو دو درجی اجزائے ضربی

$$لا^۲ + ف لا + ق ، لا^۲ + فَ لا + قَ$$

میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ (۱) فہ ایک کعبی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی ممکن قیمتیں اختیار کرے جو حسب ذیل نمونوں میں سے ہر ایک کے متناظر ہیں:—

$$ق + قَ ، \frac{ق - قَ}{ف - فَ} ، \frac{ف قَ - فَ ق}{ف - فَ} ، \frac{ف قَ - فَ ق}{ق - قَ}$$

$$(ف - فَ)^۲ ، (ف - فَ)(ق - قَ) ، (ق - قَ)^۲ ، (ف قَ - فَ ق)^۲$$

اور (۲) فہ ایک چھ درجی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی قیمتیں اختیار کرے جو

$$ف ، ق ، ف - فَ ، ف قَ - فَ ق ، ف^۲ - ۴ ق ، یا ق - ق$$

کے متناظر ہیں۔

ان تفاعلوں کو اصلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے ہر تفاعل کی ممکن قیمتوں کی تعداد معلوم ہوتی ہے۔

۶۵۔ چار درجی کا متکافی شکل میں استحالہ۔ اس استحالہ کو عمل میں لانیکے لئے ہم مساوات

$$ا لا^۴ + ۴ ب لا^۳ + ۶ ج لا^۲ + ۴ د لا + س = ۰$$

میں لا = ک ما + ر درج کرتے ہیں جس سے اس کی شکل ہو جاتی ہے

$$ا ک^۴ ما^۴ + ۴ ع_۱ ک^۳ ما^۳ + ۶ ع_۲ ک^۲ ما^۲ + ۴ ع_۳ ک ما + ع_۴ = ۰.$$

جہاں

$$ع_۱ = ا ر + ب ، ع_۲ = ا ر^۲ + ۲ ب ر + ج ، ع_۳ = ا ر^۳ + ۳ ب ر^۲ + ۳ ج ر + د \text{ وغیرہ}$$

(دیکھو دفعہ ۳۵) - اگر یہ مساوات متکافی ہو تو ک اور س معلوم کرنیکے لئے ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں یعنی

$$ا ک^{۲} = ع_{۲} ، ک^{۳} ع_{۱} = ک ع_{۳}$$

(136) ک کو ساقط کرنے سے س کے لئے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ا ع_{۳}^{۲} - ع_{۱}^{۲} ع_{۲} = ۰$$

اور چونکہ

$$ک^{۲} = \frac{ع_{۳}}{ع_{۱}} = \frac{ا س^{۳} + ۳ ب س^{۲} + ۳ ج س + د}{ا س + ب}$$

اس لئے س کی ہر قیمت کے جواب میں ک کی دو قیمتیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں -

مساوات

$$ا ع_{۳}^{۲} - ع_{۱}^{۲} ع_{۲} = ۰$$

کو جب اندراجات (دفعات ۳۶، ۳۷)

$$ا^{۲} ع_{۲} = ع_{۱}^{۲} + ۳ ھ ع_{۱} + گ ،$$

$$ا^{۳} ع_{۳} = ع_{۱}^{۳} + ۶ ھ ع_{۱}^{۲} + ۴ گ ع_{۱} + ا^{۲} ع - ۳ ھ^{۲}$$

کے ذریعہ تحویل کیا جائے تو وہ ہو جاتی ہے

$$۲ گ ع_{۱}^{۳} + (ا^{۲} ع - ۱۲ ھ^{۲}) ع_{۱}^{۲} - ۶ گ ھ ع_{۱} - گ^{۲} = ۰ \quad (۱)$$

جو ایک کعبی مساوات ہے جس سے $ع_{۱} = ا س + ب$ کی تعیین ہوتی ہے اور اگر ہم رکھیں

$$ا س + ب = \frac{\frac{۱}{۲} گ}{ا^{۲} ط - ھ}$$

تو معیاری محول کعبی

$$۴ ا^۳ ط^۳ - ع ا ط + جے = ۰$$

سے ط متعین ہو جاتا ہے ۔

اس استحالہ کو[1] چار درجی کے حل کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے اور یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ کعبی (۱) جو یہاں پیش ہوا ہے دفعہ ۶۲ کے کعبی سے صرف اسقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی اصلیں اُس کی اصلوں سے مختلف العلامت ہیں ۔

اب ہم ک اور ر کو چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں بیان کرینگے ۔ چونکہ ما کی مساوات جو لا = ک ما + ر رکھنے سے حاصل ہوئی ہے تنکافی ہے اسلئے اسکی اصلیں شکل $ما_۱، ما_۲، \frac{۱}{ما_۱}، \frac{۱}{ما_۲}$ کی ہیں ۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$عہ = ک ما_۱ + ر، \quad بہ = ک ما_۲ + ر، \quad جہ = ک \frac{۱}{ما_۲} + ر$$

$$ضہ = ک \frac{۱}{ما_۱} + ر$$

اور اس لئے

$$(عہ - ر)(ضہ - ر) = (بہ - ر)(جہ - ر) = ک^۲ \qquad (137$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ر = \frac{بہ\ جہ - عہ\ ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ}$$

اور

$$ک^۲ = -\frac{(جہ - عہ)(بہ - ضہ)(عہ - بہ)(جہ - ضہ)}{(بہ + جہ - عہ - ضہ)^۲}$$

---

[1] چار درجی مساوات کو تنکافی شکل میں تحویل کر کے حل کرنیکا یہ طریقہ مسٹر ایس۔ ایس گریٹ ہیڈ (S. S. Great heed) نے کیمبرج متھامیٹکل جرنل جلد اول میں بیان کیا ہے ۔

ک اور م جو اس استحالہ میں داخل ہوتے ہیں انکی ایک اہم ہندسی تعبیر دیجا سکتی ہے ۔ ایک خط مستقیم پر ایک ثابت مبدا، و لو اور فرض کرو کہ اس پر کے چار نقطوں ا، ب، ج، د کے فاصلے و ا، و ب، و ج، و د مساوات

$$\text{ا لا}^{4} + 4\,\text{ب لا}^{3} + 6\,\text{ج لا}^{2} + 4\,\text{د لا} + \text{س} = 0$$

کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ سے متعین ہوگئے ہیں ۔ نیز فرض کرو کہ دو درجی مساواتوں کے حسب ذیل تین جوڑے

$$(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ}) = 0 \text{،} \quad (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) = 0$$

$$(\text{لا} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{عہ}) = 0 \text{،} \quad (\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) = 0$$

$$(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ}) = 0 \text{،} \quad (\text{لا} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) = 0$$

سے دریچ کے جو تین نظام متعین ہوتے ہیں انکے مرکز و_1، و_2، و_3 اور ان کے ماسکے ف_1، فَ_1 اور ف_2، فَ_2 اور ف_3، فَ_3 ہیں۔

تب ہمیں مساواتیں ملینگی

$$\text{و}_1\text{ب} \times \text{و}_1\text{ج} = \text{و}_1\text{ا} \times \text{و}_1\text{د} = \text{و}_1\text{ف}_1^{2} \text{، وغیرہ}$$

جنکو مستحیل کرکے مساواتوں

$$(\text{بہ} - \text{م})(\text{جہ} - \text{م}) = (\text{عہ} - \text{م})(\text{ضہ} - \text{م}) = \text{ک}^{2} \text{، وغیرہ}$$

کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ ثابت ہوتا ہے کہ م کی تین قیمتیں و و_1، و و_2، و و_3 ہیں یعنے ثابت مرکز سے دریچ کے تین مرکزوں کے فاصلے نیز چونکہ $\text{و}_1\text{ف}_1^{2} = \text{ک}^{2}$ اسلئے ک کی چھ قیمتیں ہیں جو ہندسی طور پر فاصلوں

$$\text{و}_1\text{ف}_1 \text{، } \text{و}_1\text{فَ}_1 \text{، } \text{و}_2\text{ف}_2 \text{، } \text{و}_2\text{فَ}_2 \text{، } \text{و}_3\text{ف}_3 \text{، } \text{و}_3\text{فَ}_3$$

سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں $\text{و}_1\text{ف}_1 + \text{و}_1\text{فَ}_1 = 0$، وغیرہ کیونکہ فاصلے مخالف سمتوں میں ناپے گئے ہیں ۔

ہم صرف ہندسی نقطۂ نگاہ سے دریچ کے مرکزوں اور ماسکوں کو

عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں معلوم کرسکتے ہیں اور اس طرح اُن نتیجوں کی مزید تصدیق جو ابھی ثابت ہوئے ہیں حسب ذیل طریقہ پر کرتے ہیں۔

چونکہ نظام [ف ب فَ ج] اور [ف ا فَ د] موسیقی ہیں اسلئے

$$\frac{۲}{ف_۱ فَ_۱} = \frac{۱}{ف_۱ ب} + \frac{۱}{فَ_۱ ج} = \frac{۱}{ف_۱ ا} + \frac{۱}{فَ_۱ د}$$

اور اگر ف۱ یا فَ۱ کا فاصلہ ثابت مبدا و سے لا ہو تو

$$\frac{۱}{لا - بہ} + \frac{۱}{لا - جہ} = \frac{۱}{لا - عہ} + \frac{۱}{لا - ضہ}$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$لا = \frac{بہ\,جہ - عہ\,ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} \pm \frac{\sqrt{-(جہ - عہ)(بہ - ضہ)(عہ - بہ)(جہ - ضہ)}}{بہ + جہ - عہ - ضہ}$$

یا $لا = ر \pm ک$

جس سے $ر = \frac{و ف_۱ + و فَ_۱}{۲}$

$$ک = \pm \frac{و ف_۱ - و فَ_۱}{۲} = \pm و ف_۱$$

مثال

کعبی

$$ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د$$

کو متکافی شکل میں تحویل کرو۔

$لا = ک ما + ر$ فرض کرنے سے مساوات

$$ھ^3 + ۳ ھ^2 ع_1^2 + ع_1^3 گ - = .$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $ع_1 \equiv ا / ر + ب$ ۔

ر کی قیمتیں بہ آسانی حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{به\ جه - عه^2}{به + جه - ۲ عه} ، \frac{جه\ عه - به^2}{جه + عه - ۲ به} ، \frac{عه\ به - جه^2}{عه + به - ۲ جه} .$$

اس صورت میں ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر محور پر تین نقطے اَ، بَ، جَ لئے جائیں اس طور پر کہ ب اور ج کے لحاظ سے ا کا موسیقی مزدوج اَ ہو، جَ اور ا کے لحاظ سے ب کا بَ، ا اور ب کے لحاظ سے ج کا جَ تو ر اور ک کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی :—

$$ر = \frac{وا + وَا}{۲} ، ک = \frac{وا - وَا}{۲}$$

ع، به، جه کی رقوم میں وَا، وَب، وَج کی قیمتوں کے لئے دیکھو مثال ۱۳ صفحہ (۱۲۷)۔

۶۶ — اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے چار درجی کا حل۔ (139)

اس طریقہ سے چار درجی کے حل کو ایک کعبی کے حل میں تحویل کرنا اسوقت ممکن ہے جب چار اصلوں ع، به، جه، نمه کے ایسے تفاعل بنانا ممکن ہو جو صرف تین قیمتیں قبول کریں اگر اصلوں کو باہم دگر ہر طرح ایک دوسرے کی جگہ بدلدیا جائے۔ دفعہ ۶۴ مثال ۲ کے حوالہ سے یہ معلوم ہوگا کہ اس نوعیت کے مختلف تفاعل وجود رکھتے ہیں۔ یہ تفاعل دفعہ ۵۹ کے حاصل تفاعلوں کی طرح یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ تین تین کے کوئی ایسے دو جٹ اس طور پر مربوط ہوتے ہیں کہ کسی جٹ کا کوئی ایک تفاعل دوسرے جٹ کے ایک تفاعل کے ساتھ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط رکھتا ہے۔ اس مسئلہ کو آئندہ ثابت کیا جائیگا۔

موجودہ حل کے مقاصد کو پیش نظر رکھکر ہم وہ تفاعل استعمال کرتے ہیں

جن کا حوالہ دفعہ ۵۵ میں دیا گیا ہے کیونکہ ان سے بالراست چار درجی کی اصلوں کیلئے جذر سروں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں ۔ اس لئے اب ہم وہ مساوات بنائینگے جسکی اصلیں

$$ت \equiv \left(\frac{عہ + طہ\,بہ + طہ^{۲}\,جہ + طہ^{۳}\,ضہ}{۴}\right)^{۲}$$

کی تین قیمتیں ہوں جبکہ اصلوں کا ہر طرح ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کیا جائے اور طہ = −۱ ۔

یہ قیمتیں ہیں

$$ت_{۱} \equiv \left(\frac{بہ + جہ - عہ - ضہ}{۴}\right)^{۲}،\quad ت_{۲} \equiv \left(\frac{جہ + عہ - بہ - ضہ}{۴}\right)^{۲}،$$

$$ت_{۳} \equiv \left(\frac{عہ + بہ - جہ - ضہ}{۴}\right)^{۲}$$

اور چونکہ

$$(بہ + جہ - عہ - ضہ)^{۲} \equiv \Sigma\, عہ^{۲} + ۲\,لہ - ۲\,مہ - ۲\,نہ ،$$

$$\Sigma\,(عہ - بہ)^{۲} \equiv ۳\,\Sigma\,عہ^{۲} - ۲\,لہ - ۲\,مہ - ۲\,نہ = -۴۸\,\frac{ھ}{ا^{۲}} ،$$

اسلئے $ت_{۱}$، $ت_{۲}$، $ت_{۳}$ کی قیمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{۲\,لہ - مہ - نہ}{۱۲} - \frac{ھ}{ا^{۲}} ،\quad \frac{۲\,مہ - نہ - لہ}{۱۲} - \frac{ھ}{ا^{۲}} ،\quad \frac{۲\,نہ - لہ - مہ}{۱۲} - \frac{ھ}{ا^{۲}}$$

جس سے

$$ت_{۱} + ت_{۲} + ت_{۳} = -۳\,\frac{ھ}{ا^{۲}}$$

پھر چونکہ

(140)

$$\Sigma\,(۲\,مہ - نہ - لہ)(۲\,نہ - لہ - مہ) = -۳\,(لہ^{۲} + مہ^{۲} + نہ^{۲} - مہ\,نہ - نہ\,لہ - لہ\,مہ)$$

$$= -\frac{۳}{۲}\,\Sigma\,(مہ - نہ)^{۲}$$

اور

$$\Sigma\,(مہ - نہ)^{۲} = ۲۴\,\frac{ع}{ا^{۲}}$$

اسلیے

$$ت_2 ت_3 + ت_3 ت_1 + ت_1 ت_2 = \frac{۳ ه^2}{ا^2} - \frac{۱}{۹۶} \Sigma (س - ن)^2 = \frac{۳ ه^2}{ا^2} - \frac{ع}{۴ ا^2}$$

نیز $$ت_1 ت_2 ت_3 = \frac{گ}{۴ ا^3}$$

پس وہ مساوات جس کی اصلیں ا ت$_1$، ا ت$_2$، ا ت$_3$ ہیں ہو جاتی ہے

$$(ا ت)^3 + ۳ ه (ا ت)^2 + \left(۳ ه^2 - \frac{ا^2 ع}{۴}\right)(ا ت) - \frac{گ}{۴} = ۰$$

یا گ^2 کی بجائے اُسکی قیمت دفعہ ۳ سے درج کرنے سے

$$۴ (ا ت + ه)^3 - ا^2 ع (ا ت + ه) + ا^3 ج = ۰$$

جو ا ت + ه = ا ط کے ابدال سے معیاری محول کعبی میں تحویل ہوتا ہے۔

عہ، بہ، جہ، ضہ کو متعین کرنیکے لئے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$-عہ + بہ + جہ - ضہ = ۴\sqrt{ت_1}، \quad عہ - بہ + جہ - ضہ = ۴\sqrt{ت_2}،$$

$$عہ + بہ - جہ - ضہ = ۴\sqrt{ت_3}$$

اور نیز $$عہ + بہ + جہ + ضہ = -۴ \frac{ب}{ا}$$

اِن سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$عہ = -\frac{ب}{ا} - \sqrt{ت_1} + \sqrt{ت_2} + \sqrt{ت_3}،$$

$$بہ = -\frac{ب}{ا} + \sqrt{ت_1} - \sqrt{ت_2} + \sqrt{ت_3}،$$

$$جہ = -\frac{ب}{ا} + \sqrt{ت_1} + \sqrt{ت_2} - \sqrt{ت_3}،$$

$$ضہ = -\frac{ب}{ا} - \sqrt{ت_1} - \sqrt{ت_2} - \sqrt{ت_3}$$

141)

نیز $\sqrt[3]{ت_1}$، $\sqrt[3]{ت_2}$، $\sqrt[3]{ت_3}$ کی متذکرۂ بالا قیمتوں سے مساوات

$$\sqrt[3]{ت_1}\,\sqrt[3]{ت_2}\,\sqrt[3]{ت_3} = \frac{گ}{۲۷}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے ذریعہ ایک جذر کو دوسرے دو جذروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور پھر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اصل کے لئے عام ضابطہ وہی ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے۔

اس دفعہ کے مضمون کے سلسلہ میں چار درجی کی اصلوں کے ایسے دو تفاعلوں کا ذکر کر دینا سہولت بخش ہے جو ایسے خواص رکھتے ہیں جو دفعہ ۵۹ میں کعبی کی اصلوں کے متناظر تفاعلوں کے ثابت شدہ خواص کے مشابہ ہیں۔ بحوالہ بالا دفعہ کی ترقیم کے قابل ترمیم اختیار کرنے سے ان تفاعلوں کو ل، مہ کی رقوم میں بشکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:-

$$ل \equiv (به\,جه + عه\,ضه) + سہ\,(جه\,عه + به\,ضه) + سہ^2\,(عه\,به + جه\,ضه)،$$

$$مہ \equiv (به\,جه + عه\,ضه) + سہ^2\,(جه\,عه + به\,ضه) + سہ\,(عه\,به + جه\,ضه)$$

دفعہ ۶۳ مثال (۱) کی مساواتوں کے ذریعہ ان تفاعلوں کو محول کعبی کی اصلوں کی رقوم میں بشکل

$$\tfrac{1}{۴}\,ل = طہ_1 + سہ\,طہ_2 + سہ^2\,طہ_3،$$

$$\tfrac{1}{۴}\,مہ = طہ_1 + سہ^2\,طہ_2 + سہ\,طہ_3$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ نیز ان کو دفعہ ہذا کی اُس مساوات کی مدد سے جو ت اور طہ کو مربوط کرتی ہے $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$ کی رقوم میں حسب طریقۂ ذیل بیان کیا جا سکتا ہے

$$\tfrac{1}{۴}\,ل = ت_1 + سہ\,ت_2 + سہ^2\,ت_3،$$

$$\tfrac{1}{۴}\,مہ = ت_1 + سہ^2\,ت_2 + سہ\,ت_3$$

یہ تفاعل ل اور م، چار درجی کے نظریہ میں اتنی ہی اہمیت رکھتے ہیں جتنی اہمیت دفعہ ۵۹ کے تفاعل کعبی کے نظریہ میں رکھتے ہیں۔ ان جملوں کے مکعب چار مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو ہر طرح آپس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ وہ مندرجۂ بالا محول کعبی کے محول دو درجی کی اصلیں ہیں اور چار درجی کے ہر بیان شدہ حل میں موجود رہتی ہیں۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ل اور م، اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

عہ، بہ، جہ، ضہ کو بقدر ھ کے بڑھانے سے ل اور م غیر متغیر رہتے ہیں کیونکہ ۱ + سہ + سہ^۲ = ۰۔

۲۔ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

طہ۱، طہ۲، طہ۳ کی رقوم میں ل اور م کی قیمتوں سے ہم بہ آسانی معلوم کرتے ہیں کہ

۱۲ طہ۱ = ل + مَ ، لَ − م = (بہ − جہ)(عہ − ضہ)(سہ^۲ − سہَ)

۱۲ طہ۲ = سہ^۲ ل + سہ مَ ، سہ^۲ لَ − سہ م = (جہ − عہ)(بہ − ضہ)(سہ^۲ − سہَ)

۱۲ طہ۳ = سہ ل + سہ^۲ مَ ، سہ لَ − سہ^۲ م = (عہ − بہ)(جہ − ضہ)(سہ^۲ − سہَ)

پھر ان مساواتوں کے طرفین کی رقموں کو باہم ضرب دیکر اور یہ یاد رکھکر کہ طہ۱، طہ۲، طہ۳ مساوات

۴ ا^۳ طہ^۳ − ع ا طہ + جے = ۰

کی اصلیں ہیں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ

ل^۳ + م^۳ = − ۴۳۲ جے / ا^۳

ل³ − م³ = ۲ √−۳ (ب − جہ)(جہ − عہ)(عہ − ب)(عہ − ضہ)(ب − ضہ)(جہ − ضہ)

نیز انہی رقموں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

۲ ل م = ۲۴ ا۲ = (ب − جہ)²(عہ − ضہ)² + (جہ − عہ)²(ب − ضہ)² + (عہ − ب)²(جہ − ضہ)²

اور چونکہ

(ل³ − م³)² = (ل³ + م³)² − ۴ ل³ م³

اسلئے ان مقداروں کی بجائے انکی قیمتیں قبل الذکر مساواتوں سے حاصل کرکے درج کرنے سے بالآخر ہمیں حاصل ہوگا

ا⁶ (ب − جہ)²(جہ − عہ)²(عہ − ب)²(عہ − ضہ)²(ب − ضہ)²(جہ − ضہ)²

= ۲۵۶ (ع³ − ۲۷ ج²)

۳ — دفعہ ۵۹ کی مساواتوں کا مقابلہ دفعہ ہذا کی مساواتوں کے ساتھ کرنے سے ثابت کرو کہ قبل الذکر کے نتیجوں کو چار درجی کے لئے توسیع دیجا سکتی ہے اگر
ب − جہ، جہ − عہ، عہ − ب کو علی الترتیب
−(ب − جہ)(عہ − ضہ)، −(جہ − عہ)(ب − ضہ)، −(عہ − ب)(جہ − ضہ)
میں بدلدیا جائے اور اس کے ساتھ ہی ھ کو − ۴/۳ ع میں اور گ کو ۱۶ ا ج میں۔

۶۷ — چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات۔ چوتھے با

(دفعہ ۴۴) میں فرقوں کی مساوات بنانیکے عام مسئلہ کا ذکر کیا گیا تھا لگرانج نے یہ تجویز پیش کی تھی کہ اس مساوات کو کسی دی ہوئی عددی مساوات کی اصلوں کو جدا کرنے کی غرض کے لئے استعمال کیا جائے چنانچہ اس نے اپنے اس استعمال کو پیش نظر رکھ کر مربع دار فرقوں کی مساوات کی عام شکلیں چوتھے اور پانچویں درجہ کی اُن مساواتوں کے لئے محسوب کی تھیں جنہیں دوسری رقم غائب تھی

43) *Traite de la Resolution des Equations Numerique*

نوٹ سوم)۔ اگرچہ کہ عملی مقاصد کے لئے اصلوں کو جدا کرنیکے وہ طریقے قابل ترجیح ہیں جو آیندہ بیان کئے جائینگے تاہم اس باب کے مضامین کے سلسلہ میں چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات کا ذکر کردینا کافی دلچسپی کا باعث ہوگا۔ چنانچہ ہم عام سے عام شکل میں چار درجی کے لئے یہ مساوات محسوب کرینگے۔ دفعہ ۶۱ مثال ۷ میں جو کچھ ثابت کیا گیا ہے اسکے مطابق یہ معلوم ہوگا کہ حاصل ہونیوالی مساوات کے سر سب کے سب ل، ھ، ع اور جے کی رقوم میں بیان ہوسکتے ہیں۔

یہ مسئلہ فی الحقیقت اس کے مماثل ہے کہ حسب ذیل حاصل ضرب کو چار درجی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے:۔

$$\{\text{فہ}-(\text{بہ}-\text{جہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{جہ}-\text{عہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{عہ}-\text{بہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{عہ}-\text{ضہ})^2\}$$

$$\times\{\text{فہ}-(\text{بہ}-\text{ضہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{جہ}-\text{ضہ})^2\}$$

اس حاصل ضرب کو معلوم کرنیکا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ان چھ اجزائے ضربی میں سے دو دو کے جٹ بنائے جائیں اور ایسے تین حاصل ضربوں کو (جنکو ہم Π_1، Π_2، Π_3 سے تعبیر کرینگے) علیحدہ علیحدہ محول کعبی کی اصلوں کی رقوم میں بیان کیا جائے اور آخر میں حاصل ضرب $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ کو ل، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

$$\Pi_1 \equiv \text{فہ}^2-\{(\text{بہ}-\text{جہ})^2+(\text{عہ}-\text{ضہ})^2\}\,\text{فہ}+(\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{عہ}-\text{ضہ})^2،$$

اور دفعہ ۶۱ کے نتیجوں کی مدد سے ہم $(\text{بہ}-\text{جہ})^2$، $(\text{عہ}-\text{ضہ})^2$ کے لئے بہ آسانی حسب ذیل جملے اخذ کرتے ہیں:۔

$$۴\left(\sqrt{\text{طہ}_2-\frac{\text{ھ}}{۲\text{ل}}}-\sqrt{\text{طہ}_3-\frac{\text{ھ}}{۲\text{ل}}}\right)^2،\quad ۴\left(\sqrt{\text{طہ}_2-\frac{\text{ھ}}{۲\text{ل}}}+\sqrt{\text{طہ}_3-\frac{\text{ھ}}{۲\text{ل}}}\right)^2$$

پس بغیر کسی مشکل کے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Pi_1 \equiv \text{فہ}^2+\left(۸\,\text{طہ}_1+۱۶\,\frac{\text{ھ}}{۲\text{ل}}\right)\text{فہ}+۴\,\frac{\text{ع}}{۲\text{ل}}-۴۸\,\text{طہ}_2\,\text{طہ}_3$$

اختصار کی خاطر ترقیم

$$۱۲\,ھ = اَ\,ف،\quad ۴\,ع = اَ\,ق،\quad ۱۲\,جے = اَ^{۳}\,ر،$$

$$فہ^{۲} + ف\,فہ + ق = پہ$$

کو داخل کیا جائے تو $\pi_۱$ ہو جاتا ہے $پہ + ۸\,طہ_۱\,فہ - ۴۸\,طہ_۲\,طہ_۳$

حاصل ضرب $\pi_۱$، $\pi_۲$، $\pi_۳$ کو مثال ۱۸ صفحہ (۱۲۸) سے تحویل کیا جائے تو

$$پہ^{۳} + ۳\,ق\,پہ^{۲} - (۴\,ق\,فہ^{۲} + ۱۸\,ر\,فہ)\,پہ - (۸\,ر\,فہ^{۳} + ۱۲\,ق^{۲}\,فہ^{۲} + ۳۶\,ق\,ر\,فہ + ۲۷\,ر^{۲}) = ۰$$

آخرالامر پہ کی قیمت درج کرنے سے ہمیں ف، ق، ر کی رقوم میں مربع دار فرقوں کی مساوات ملیگی

$$فہ^{۶} + ۳\,ف\,فہ^{۵} + (۳\,ف^{۲} + ۲\,ق)\,فہ^{۴} + (ف^{۳} + ۸\,ف\,ق - ۲۶\,ر)\,فہ^{۳} + (۲\,ف^{۲}\,ق - ۷\,ق^{۲} - ۱۸\,ف\,ر)\,فہ^{۲} + ۹\,ق\,(ف\,ق - ۶\,ر)\,فہ + ۴\,ق^{۳} - ۲۷\,ر^{۲} = ۰$$ [۱]

اَ، ھ، ع، جے کی رقوم میں یہ مساوات حسب ذیل ہوگی (44)

$$اَ^{۲}\,فہ^{۶} + ۴۸\,اَ^{۲}\,ھ\,فہ^{۵} + ۸\,اَ^{۲}(۹۶\,ھ^{۲} + اَ^{۲}\,ع)\,فہ^{۴} + ۳۲\,(۱۲۸\,ھ^{۳} + ۱۲\,اَ^{۲}\,ھ\,ع - ۱۱\,اَ^{۳}\,جے)\,فہ^{۳} + ۱۶\,(۳۸۴\,ھ^{۲}\,ع - ۷\,اَ^{۲}\,ع^{۲} - ۲۸۸\,اَ\,ھ\,جے)\,فہ^{۲} + ۱۱۵۲\,(۲\,ھ\,ع - ۳\,اَ\,جے)\,ع\,فہ + ۲۵۶\,(ع^{۳} - ۲۷\,جے^{۲}) = ۰$$

یہ قابل توجہ ہے کہ $\pi_۱$ کے لئے جو قیمت اوپر حاصل کیگئی ہے اسکو مساوات

$$طہ_۲\,طہ_۳ = طہ_۱^{۲} - \frac{۱}{۴\,اَ^{۲}}$$

کی مدد سے طہ$_۱$ کے دو درجی تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اور اس کے بعد کا عمل حساب اِس دو درجی اور محول کعبی کے

---

۱ مربع دار فرقوں کی مساوات کو اس شکل میں پہلے مسٹر ایم۔ رابرٹس نے Nouvelles Annales de Mathematiques کی سولھویں جلد میں دیا تھا۔

درمیان طہ کو ساقط کرنے سے جاری رکھا جا سکتا ہے۔

۶۸ — چار درجی کی اصلونکی نوعیت کی جانچ - اِس تحقیقات کو جاری کرنے سے بیشتر دفعہ ۳۴ میں جو بیان کیا گیا ہے اُسکا دہرانا ضروری ہے اور وہ یہ کہ جب کسی جبری مساوات کی اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی شرط سروں کے ایک تفاعل کی علامت سے تعبیر ہو تو ان سروں کا حقیقی عددی مقداروں کو تعبیر کرنا فرض کر لیا جاتا ہے۔ مزید بریں یہ بھی تسلیم کر لیا جاتا ہے کہ سب سے بڑے درجہ کی رقم کا سر معدوم نہیں ہوتا جیسا کہ مذکورۂ بالا دفعہ میں کیا گیا تھا۔

حسب سابق فرض کرو کہ Δ سے سروں کا وہ تفاعل تعبیر ہوتا ہے (اِس کو ہم ممیز کہینگے) جسکو ایک مثبت عددی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے تو وہ اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

اب دفعات گذشتہ کے ثابت شدہ مسئلوں سے مساوات ملتی ہے

$$\text{ا}^{6}(\text{بہ}-\text{جہ})^{2}(\text{جہ}-\text{عہ})^{2}(\text{عہ}-\text{بہ})^{2}(\text{عہ}-\text{ضہ})^{2}(\text{بہ}-\text{ضہ})^{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})^{2}=256\,\Delta$$

جہاں

$$\Delta \equiv \text{ع}^{3}-27\,\text{جے}^{2}$$

ذیل میں اصلوں کی نوعیت کی بحث کو سہولت کے مدنظر تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یعنی (۱) جب Δ معدوم ہو یا (۲) جب وہ منفی ہو یا (۳) جب وہ مثبت ہو۔

(۱) جب Δ معدوم ہو تو مساوات میں مساوی اصلیں ہوتی ہیں

یہ امر Δ کی مندرجۂ بالا قیمت سے ظاہر ہے۔ اب چار مختلف صورتیں برآمد ہوتی ہیں۔ (عہ) جب صرف دو اصلیں مساوی ہوں۔ اِس صورت میں ع اور جے علیحدہ علیحدہ معدوم نہیں ہوتے۔ (بہ) جب تین اصلیں مساوی ہوں، اس صورت میں علیحدہ علیحدہ ع ≡ ۰ اور جے ≡ ۰۔ (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۶۱)۔ (جہ) جب اصلوں کے دو مختلف زوج مساوی ہوں۔

145) اس صورت میں شرطیں ہونگی گ = ۰، ا۲ ع - ۱۲ ھ۲ = ۰ (دفعہ ۶۱ مثال ۳)
دفعہ ۴۷ کی مماثلہ کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ شرطیں
مساوات Δ = ۰ کو مستلزم ہیں۔ پس یہ دو مساواتیں، مساوات Δ = ۰
کے ساتھ ملکر صرف دو شرطوں کے مماثل ہیں۔ (ضہ) جب سب اصلیں مساوی
ہوں۔ اس صورت میں دفعہ ۶۱ سے تین شرطیں ھ = ۰، ع = ۰، اور جے = ۰
اخذ کیجا سکتی ہیں۔ ان کو ایک ایسی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جو دفعہ ۳۴ کی
صورت (۴) کی شرطوں کے لئے حاصل کردہ شکل کے مشابہ ہو۔

(۲) جب Δ منفی ہو تو مساوات کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں
خیالی ہوتی ہیں اصلوں کی رقوم میں Δ کی قیمت سے اسکو اخذ کیا جا سکتا ہے
کیونکہ جب سب اصلیں حقیقی ہوں تو Δ صریحاً مثبت ہے اور جب عہ، بہ
جہ، ضہ کی بجائے مناسب خیالی جگہ یعنی د ± ک $\sqrt{-1}$، ہ ± ک $\sqrt{-1}$
درج کئے جاتے ہیں تو فوراً یہ معلوم ہوتا ہے کہ Δ مثبت ہے اسوقت بھی جبکہ
سب اصلیں خیالی ہوں۔

(۳) جب Δ مثبت ہو تو یا تو سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب
اصلیں خیالی۔ اسکو بھی Δ کی قیمت سے حاصل کیا جا سکتا ہے کیونکہ عہ، بہ
کی بجائے د ± ک $\sqrt{-1}$ درج کرنے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ Δ منفی ہے
جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔ اس لئے اس صورت میں
یعنی جب Δ مثبت ہو صرف یہ تفاعل ہی اصلوں کی نوعیت
کو پوری طرح متعین کرنے میں کافی نہیں ہے کیونکہ پھر بھی یہ امر مشتبہ رہ جاتا
ہے کہ آیا سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب خیالی۔ مزید شرطیں جو ان دو صورتوں
میں تمیز پیدا کرنے کے لئے ضروری ہیں یولر کے کعبی (دفعہ ۶۱) سے اس طرح
حاصل کیجا سکتی ہیں:- سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے یہ ضرور

ہے کہ علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں اور جب علامتیں اس نوعیت کی ہوں تو کعبی کوئی حقیقی منفی اصل نہیں رکھ سکتا۔ اسلئے ہم دفعہ ۶۱ مثال ۲ کی مدد سے اس صورت پر منطبق ہونیوالا مندرجۂ ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-

جب Δ مثبت ہو تو ہر صورت میں چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں سوائے اس صورت کے جب یہ شرطیں پوری ہوں کہ $ھ$ منفی اور $ا^۲ ع - ۱۲ ھ^۲$ منفی ہو اور ایسی صورت میں سب اصلیں حقیقی ہونگی۔

(146

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر $ھ$ مثبت ہو یا اگر $ھ = ۰$ (اور $گ \neq ۰$) تو کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہوگا۔

۲۔ ثابت کرو کہ اگر $ھ$ منفی ہو تو کعبی کی اصلیں :- (۱) سب حقیقی اور غیر مساوی (۲) دو مساوی یا (۳) دو خیالی ہونگی بموجب اسکے کہ $گ^۲$ (۱) چھوٹا، (۲) مساوی یا (۳) بڑا ہو $-۴ ھ^۳$ سے۔

۳۔ اگر کعبی مساوات

$$ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$$

کی دو اصلیں $ع$ کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ع = \frac{ھ_۲}{ھ_۱} = \frac{ھ_۱}{ھ} -$$

جہاں $ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲ \equiv ھ$، $ا_۰ ا_۳ - ا_۱ ا_۲ \equiv ۲ ھ_۱$، $ا_۱ ا_۳ - ا_۲^۲ \equiv ھ_۲$

۴۔ اگر

$$ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د + ک (لا - ر)^۳$$

کامل مکعب ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ا ج - ب^۲) ر^۲ + (ا د - ب ج) ر + (ب د - ج^۲) = ۰$$

۵ — وہ شرط معلوم کرو کہ کعبی

$$ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د$$

کو شکل

$$ل (لا - عہ_۱)^۳ + م (لا - بہ_۱)^۳ + ن (لا - جہ_۱)^۳$$

میں لکھا جا سکے جہاں عہ$_۱$، بہ$_۱$، جہ$_۱$ کعبی مساوات

$$ا_۱ لا^۳ + ۳ ب_۱ لا^۲ + ۳ ج_۱ لا + د_۱ = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

شکلوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ا = ل + م + ن ،$$

$$- ب = ل عہ_۱ + م بہ_۱ + ن جہ_۱ ،$$

$$ج = ل عہ_۱^۲ + م بہ_۱^۲ + ن جہ_۱^۲ ،$$

$$- د = ل عہ_۱^۳ + م بہ_۱^۳ + ن جہ_۱^۳$$

نیز $ا_۱ عہ_۱^۳ + ۳ ب_۱ عہ_۱^۲ + ۳ ج_۱ عہ_۱ + د_۱ = ۰$ ، وغیرہ

اسلئے ان مساواتوں کو علی الترتیب $د_۱$ ، $۳ج_۱$ ، $۳ ب_۱$ ، $ا_۱$ سے ضرب دو اور جمع کرو تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$(ا د_۱ - ا_۱ د) - ۳ (ب ج_۱ - ب_۱ ج) = ۰$$

۶ — اگر عہ ، بہ ، جہ ، کعبی مساوات

$$ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو مساوات

$$\sqrt[۴]{لا - عہ} + \sqrt[۴]{لا - بہ} + \sqrt[۴]{لا - جہ} = ۰$$

کو ناطق بناؤ اور نتیجہ کو $ا_۰$ ، $ا_۱$ ، $ا_۲$ ، $ا_۳$ کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب :۔ $\text{۱۱۵ ع}_1^{4} + \text{۲۶۰ ھ ع}_1^{2} + \text{۲۸۰ ا گ ع}_1 - \text{۴۸ ھ}^{2} = 0$۔

(147.

۷ ۔ اگر دو درجی مساواتوں

$$\text{ا}_1\text{لا}^2 + \text{۲ ب}_1\text{لا} + \text{ج}_1 = 0 \,،\quad \text{ا}_2\text{لا}^2 + \text{۲ ب}_2\text{لا} + \text{ج}_2 = 0$$

کی اصلیں ع_1، بہ_1 اور ع_2، بہ_2 ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $\text{ع}_1\text{ع}_2$ کی چار قیمتیں ہوں ۔

فرض کرو $\quad \text{ھ}_1 \equiv \text{ا}_1\text{ج}_1 - \text{ب}_1^2 \,،\quad \text{ھ}_2 \equiv \text{ا}_2\text{ج}_2 - \text{ب}_2^2$

جواب :۔ $(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{فہ}^2 - \text{۲ ب}_1\text{ب}_2\text{ فہ} + \text{ج}_1\text{ج}_2)^2 - \text{۴ ھ}_1\text{ھ}_2\text{فہ}^2 = 0$۔

نوٹ :۔ یہ اور نیچے کی دو مثالیں فہ کو اُن جذروں میں بیان کرنے سے جنمیں مساواتوں کے سر شامل ہوں حل ہوسکتی ہیں ۔

۸ ۔ مثال ۷ کی ترقیم استعمال کرکے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں $\dfrac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2}$ کی چار قیمتیں ہوں ۔

فرض کرو $\quad \text{۲ ک}_{12} \equiv \text{ا}_1\text{ج}_2 + \text{ا}_2\text{ج}_1 + \text{۲ ب}_1\text{ب}_2$

جواب :۔ $\left[\text{۲ ا}_1\text{ا}_2\text{فہ}^2 + \text{۲}(\text{ا}_1\text{ب}_2 + \text{ا}_2\text{ب}_1)\text{فہ} + \text{ک}_{12}\right]^2 - \text{ھ}_1\text{ھ}_2 = 0$۔

اس مثال میں حاصل ہونیوالا چار درجی ایسا ہے کہ $\text{گ} = 0$۔

۹ ۔ ایسی صورت میں اگر $\text{فہ} = \frac{1}{4}(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^2$ تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں فہ کی مختلف قیمتیں ہوں ۔

فرض کرو $\quad \text{م} \equiv \text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1 \,،\quad \text{۲ ھ}_{12} \equiv \text{ا}_1\text{ج}_2 + \text{ا}_2\text{ج}_1 - \text{۲ ب}_1\text{ب}_2$

جواب :۔ $\left\{(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{فہ} + \text{ھ}_{12})^2 - \text{۲ م}^2\text{فہ} + \text{ھ}_1\text{ھ}_2\right\}^2 = \text{۴ ھ}_1\text{ھ}_2(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{فہ} + \text{ھ}_{12})^2$

۱۰ ۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی میں ایک دوہری اصل ہو تو اُس کعبی میں جسکی اصلیں م کی قیمتیں ہیں (دفعہ ۶۵) وہی دوہری اصل ہوگی ۔ نیز معلوم کرو کہ چار درجی

تین اصلیں مساوی ہوں تو یہ کعبی کیا ہو جاتا ہے۔

۱۱۔ اگر ھ اور جے دونوں مثبت ہوں تو بلا واسطہ (یولر کے کعبی کی امداد کے بغیر) ثابت کرو کہ چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہیں۔

اصلوں کی رقوم میں ھ کے لئے جو جملہ ہے (مثال ۱۹ صفحہ ۲۷) اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب ھ مثبت ہو تو خیالی اصلوں کا کم از کم ایک زوج $ہ \pm ک\sqrt{-۱}$ ہونا چاہئے۔ اب سب اصلوں کو بقدر ہ کے گھٹانے سے اور انکو ک سے تقسیم کرنے سے (کیونکہ ان استحالوں سے اصلوں کے دوسرے زوج جہ، ضہ کی نوعیت پر کوئی اثر نہیں پڑیگا اور نہ ھ اور جے کی علامتوں پر) چار درجی کو شکل ذیل میں رکھا جاسکتا ہے:-

$$(لا^۲ + ۴\,ف\,لا + ق)(لا^۲ + ۱)$$

یا $لا^۴ + ۴\,ف\,لا^۳ + ۶\,ج\,لا^۲ + ۴\,ف\,لا + ق$، جہاں $۶\,ج = ق + ۱$

جس سے $ھ = ج - ف^۲$، $ع = ق - ۴\,ف^۲ + ۳\,ج^۲$

$$جے = ق\,ج + ۲\,ف^۲ج - ف^۲(ق + ۱) - ج^۳ = ج(ق - ۴\,ف^۲ - ج^۲)$$

اور اسلئے

$$ق - ۴\,ف^۲ = ج^۲ + \frac{جے}{ج} = (ھ + ف^۲)^۲ + \frac{جے}{ھ + ف^۲}$$

یا
$$\left(\frac{جہ - ضہ}{۲\,ک}\right)^۲ = (ھ + ف^۲)^۲ + \frac{جے}{ھ + ف^۲}$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ جہ اور ضہ خیالی ہیں جب، ھ اور جے مثبت ہوں۔ (دیکھو دفعہ ۶۱ مثال ۸)

148)

۱۲۔ اگر چار درجی کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو بلاواسطہ ثابت کرو کہ

$$ا^۲ع = ۱۲\,ھ^۲ ،\quad ا^۳جے = ۸\,ھ^۳$$

اِس صورت میں چار درجی کو ا سے تقسیم کیا جائے تو وہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے

$$(\text{لا}-\text{عہ})^{۲}(\text{لا}-\text{بہ})^{۲}\equiv\left\{\left(\text{لا}-\frac{\text{عہ}+\text{بہ}}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}\right)^{۲}\right\}^{۲}=\left(\frac{\text{ی}^{۲}-\text{ک}^{۲}}{\text{ا}_{۰}^{۲}}\right)^{۲}$$

جہاں $\text{ی}=\text{ا}_{۰}\text{لا}+\text{ا}_{۱}$ اور $\frac{\text{ک}}{\text{ا}_{۰}}=\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{۲}$

اب شکلوں

$$\text{ی}^{۴}-۲\text{ک}^{۲}\text{ی}^{۲}+\text{ک}^{۴}،$$

اور

$$\text{ی}^{۴}+۶\,\text{ھ}\,\text{ی}^{۲}+۴\,\text{گ}\,\text{ی}+\text{ا}_{۰}^{۲}\text{ع}-۳\,\text{ھ}^{۲}$$

کا مقابلہ کرو تو

$$۳\,\text{ھ}=-\text{ک}^{۲}،\ \text{گ}=۰،\ \text{ا}_{۰}^{۲}\text{ع}-۳\,\text{ھ}^{۲}=\text{ک}^{۴}$$

جن سے اوپر کے ربط فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ طالب علم آسانی کے ساتھ ثابت کر سکتا ہے کہ یہ ربط دفعہ ۱۶ مثال ۳ کے ربطوں کے مماثل ہیں۔ نیز اس بات کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اس صورت میں چار درجی کے حل میں صرف ایک جذرالمربع شامل ہوتا ہے (جو دو درجی (لا - عہ)(لا - بہ) کے حل سے حاصل ہوتا ہے)۔

۱۳ — وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی کو شکل

$$\text{ل}(\text{لا}^{۲}+۲\,\text{ف}\,\text{لا}+\text{ق})^{۲}+\text{م}(\text{لا}^{۲}+۲\,\text{ف}\,\text{لا}+\text{ق})+\text{ن}$$

میں رکھا جا سکے۔

اس صورت میں دوسرے اور چوتھے سروں کو ایک ساتھ ایک ہی استحالہ سے خارج کیا جا سکتا ہے اور عام حل میں صرف دو جذرالمربع شامل ہوتے ہیں۔

جواب :— $\text{گ}=۰$

۱۴ — ثابت کرو کہ چار درجی

$$\text{م}(\text{لا}-\text{ن})^{۴}-\text{ن}(\text{لا}-\text{م})^{۴}$$

کے لئے ج معدوم ہوتا ہے۔

۱۵ — اگر چار درجی کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ایک خط مستقیم پر کے مبداء سے چار نقطوں کے فاصلوں کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ جب یہ نقطے خط پر ایک

موسیقی تقسیم بناتے ہیں تو یولر کے کعبی کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں اور دفعہ ۶۲ کے کعبی کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں۔

۱۶ — مساوات

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

سے جو چار نقطے ایک خط مستقیم پر حاصل ہوتے ہیں مبداء سے اُن کے فاصلوں سے چھ غیر موسیقی تفاعل بنتے ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ تفاعل ہوں۔ وہ چھ غیر موسیقی نسبتیں یہ ہیں:—

$$\text{ف}_1،\ \frac{1}{\text{ف}_1}،\ \text{ف}_2،\ \frac{1}{\text{ف}_2}،\ \text{ف}_3،\ \frac{1}{\text{ف}_3}$$

جہاں

$$\text{ف}_1 = \frac{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})}{(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})} \equiv \frac{\text{لہ}-\text{مہ}}{\text{لہ}-\text{نہ}} = \frac{\text{طہ}_1-\text{طہ}_2}{\text{طہ}_1-\text{طہ}_3}، \tag{149}$$

$$\text{ف}_2 = \frac{(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})}{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})} \equiv \frac{\text{مہ}-\text{نہ}}{\text{مہ}-\text{لہ}} = \frac{\text{طہ}_2-\text{طہ}_3}{\text{طہ}_2-\text{طہ}_1}،$$

$$\text{ف}_3 = \frac{(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})}{(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})} \equiv \frac{\text{نہ}-\text{لہ}}{\text{نہ}-\text{مہ}} = \frac{\text{طہ}_3-\text{طہ}_1}{\text{طہ}_3-\text{طہ}_2}$$

نیز وہ مساوات جسکی اصلیں

$$(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})،\ (\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})،\ (\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})$$

ہیں کعبیوں

$$\text{ا}_0^2\,\text{ت}^3 - 12\,\text{ا}_0\,\text{ع}\,\text{ت} \pm 16\sqrt{\text{ع}^3 - 27\,\text{جے}^2}$$

میں سے ایک ہے۔

وہ مساوات جسکی اصلیں، انہیں سے کسی کعبی کی اصلوں کی نسبتیں بہ تبدیل علامت ہوں یہ ہوگی

$$4\,\Delta\,(\text{فہ}^2 - \text{فہ} + 1)^3 - 27\,\text{ع}^3\,\text{فہ}^2\,(\text{فہ} - 1)^2 = 0،$$ (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۱۲۸)

جہاں $\Delta \equiv \text{ع}^3 - 27\,\text{جے}^2$

فہ میں اس مساوات کی اصلیں مندرجۂ بالا چھ غیر موسیقی نسبتیں ہیں۔ اس مساوات کو زیادہ واضح شکل میں لکھا جا سکتا ہے جیسا کہ ذیل کے مسئلوں سے ظاہر ہوگا۔

(ا) یہ چھ غیر موسیقی نسبتیں ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہیں

$$\text{فہ}،\ \frac{1}{\text{فہ}}،\ 1-\text{فہ}،\ \frac{1}{1-\text{فہ}}،\ \frac{\text{فہ}-1}{\text{فہ}}،\ \frac{\text{فہ}}{\text{فہ}-1}$$

مساوات متماثلہ

$$(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})+(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})+(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})\equiv 0$$

سے حسب ذیل روابط ملتے ہیں

$$\text{فہ}_1+\frac{1}{\text{فہ}_3}=1،\ \text{فہ}_2+\frac{1}{\text{فہ}_1}=1،\ \text{فہ}_3+\frac{1}{\text{فہ}_2}=1$$

اور ان سے تمام غیر موسیقی نسبتوں کو ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(ب) اگر غیر موسیقی نسبتوں میں سے دو نسبتیں مساوی ہو جائیں تو فہ کی چھ قیمتیں $-\text{سہ}$ اور $-\text{سہ}^2$ ہونگی جن میں سے ہر ایک تین مرتبہ تکرار پائے گی اور اس صورت میں $\text{ج} = 0$۔

کیونکہ فرض کرو $\text{فہ}_1 = \text{فہ}_2$ تو مندرجۂ بالا ربطوں میں سے دوسرے سے

$$\text{فہ}_1^2-\text{فہ}_1+1=0$$

جس سے $\text{فہ}_1 = -\text{سہ}$ یا $-\text{سہ}^2$

اور ان قیمتوں کو فہ کی بجائے (ا) میں درج کیا جائے تو تمام غیر موسیقی نسبتیں معلوم ہوتی ہیں۔

نیز چونکہ

$$\frac{\text{لہ}-\text{مہ}}{\text{لہ}-\text{نہ}}+\frac{\text{مہ}-\text{نہ}}{\text{لہ}-\text{مہ}}=0 \text{ یا } \equiv(\text{مہ}-\text{نہ})^2=0$$

اس لئے $ع \equiv ا_0 ا_4 - ۴ ا_1 ا_3 + ۳ ا_2^2 = ۰$

(150) (ج) جب انمیں سے ایک نسبت موسیقی ہو تو فہ کی چھ قیمتیں ـ ۱، ۲، $\frac{1}{2}$ ہیں جنمیں سے ہر ایک دو مرتبہ تکرار پاتی ہے ـ اور اس صورت میں جے = ۰ ـ کیونکہ اگر

$فہ_1 = -۱$ تو $\frac{ل - مہ}{ل - نہ} = -۱$ یعنی $۲ ل - مہ - نہ = ۰$

جو جے کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۱۷) ـ

(د) یہ نتیجے اور ان کے عکس اُس چھ درجی مساوات کو جو فہ میں ہے شکل ذیل میں لکھنے سے ثابت کئے جا سکتے ہیں ـ (دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۱۷۴):ـ

$$ع^3 \{(فہ+۱)(فہ-۲)(فہ-\tfrac{1}{2})\}^2 = ۲۷ جے^2 \{(فہ+سہ)(فہ+سہ^2)\}^3$$

۱۷ـ ثابت کرو کہ مساوات

$$\left(\frac{لا^2 + ۱۴ لا + ۱}{مر^2 + ۱۴ مر + ۱}\right)^3 = \frac{لا (لا - ۱)^4}{مر^2 (مر - ۱)^4}$$

کے حل حسب ذیل ہیں:ـ

$$مر^2،\ \frac{1}{مر^2}،\ \left(\frac{۱ + طہ \sqrt{مر}}{۱ - طہ \sqrt{مر}}\right)^4 \text{، جہاں } طہ^4 = ۱$$

۱۸ـ Ξ (عہ - بہ)^2 (جہ - ضہ)^2 کو $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$ کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو اور پھر اسکو چار درجی کے سروں کی رقوم میں لکھو ـ

جواب:ـ $۱۲۸ \Xi (طہ_2 - طہ_3)^2 (طہ_1 + \frac{ھ_2}{ا_0^2}) = -\frac{۹۶}{ا_0^4} (۴ ھ ع$
$+ ۳ ا_0 جے)$

۱۹ـ $(بہ^2 - جہ^2)^2 (عہ^2 - ضہ^2)^2 + (جہ^2 - عہ^2)^2 (بہ^2 - ضہ^2)^2$
$+ (عہ^2 - بہ^2)^2 (جہ^2 - ضہ^2)^2$ کو $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$ کے منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو ـ

$$\Sigma \frac{1}{(\text{عہ}-\text{بہ})^{2}} = \frac{\text{ع}۹}{۲}\left(\frac{۳\,\text{ا جے} - ۲\,\text{ھ ع}}{\text{ع}^{۳} - ۲۷\,\text{جے}^{۲}}\right)$$

طہ۱، طہ۲، طہ۳ کی رقوم میں عہ، بہ، جہ، ضہ کے لئے جو جملے ہیں اُن سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma \frac{1}{(\text{عہ}-\text{بہ})^{2}} = -\frac{۱}{۲\,\text{ا}^{۲}}\left\{\frac{(\text{ا}^{۲}\text{طہ}_{۱}+۲\text{ھ})^{۲}}{(\text{طہ}_{۲}-\text{طہ}_{۳})^{۲}} + \frac{(\text{ا}^{۲}\text{طہ}_{۲}+۲\text{ھ})^{۲}}{(\text{طہ}_{۳}-\text{طہ}_{۱})^{۲}} + \frac{(\text{ا}^{۲}\text{طہ}_{۳}+۲\text{ھ})^{۲}}{(\text{طہ}_{۱}-\text{طہ}_{۲})^{۲}}\right\}$$

جسکو ا، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۲۳ — ثابت کرو

$$\Sigma \frac{\text{طہ}_{۱}^{\text{م}}}{(\text{طہ}_{۲}-\text{طہ}_{۳})^{۲}} = ۰$$

جبکہ ع = ۰ اور م، ۳ پ یا ۳ پ + ۱ کی شکل کا ہو جہاں پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۴ — ثابت کرو کہ

$$\text{ع} \equiv \text{ا لا}^{۲} + \text{ج ما}^{۲} + \text{س ی}^{۲} + ۲\,\text{د ما ی} + ۲\,\text{ج ی لا} + ۲\,\text{ب لا ما}$$

کو دو مربعوں کے فرق یا مجموعے کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اگر

$$\text{جے} \equiv \text{ا ج س} + ۲\,\text{ب ج د} - \text{ا د}^{۲} - \text{س ب}^{۲} - \text{ج ج}^{۲} = ۰$$

یہاں

$$\text{ا ع} \equiv (\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی})^{۲} + (\text{ا ج} - \text{ب}^{۲})\,\text{ما}^{۲} + ۲(\text{ا د} - \text{ب ج})\,\text{ما ی} + (\text{ا س} - \text{ج}^{۲})\,\text{ی}^{۲}$$

اور

$$(\text{ا ج} - \text{ب}^{۲})\,\text{ما}^{۲} + ۲(\text{ا د} - \text{ب ج})\,\text{ما ی} + (\text{ا س} - \text{ج}^{۲})\,\text{ی}^{۲}$$

کامل مربع ہے اگر

$$(\text{ا ج} - \text{ب}^{۲})(\text{ا س} - \text{ج}^{۲}) = (\text{ا د} - \text{ب ج})^{۲}$$

یا

$$\text{جے} = ۰$$

۲۵ — اگر مساوات

$ا_. لا^4 + ۴ ا_1 لا^3 + ۶ ا_2 لا^2 + ۴ ا_3 لا + ا_4 = ۰$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو سروں $ا_.$، $ا_1$، $ا_4$ وغیرہ کی رقوم میں مساوات

$$\sqrt{لا - عہ} + \sqrt{لا - بہ} + \sqrt{لا - جہ} + \sqrt{لا - ضہ} = ۰$$

کو حل کرو۔

اگر $\sqrt{عہ} + \sqrt{بہ} + \sqrt{جہ} + \sqrt{ضہ} = ۰$

کو ناطق بنایا جائے اور عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے سروں کو درج کیا جائے تو

$$(۳ ا_. ا_2 - ۲ ا_1^2)^2 = ا_.^3 ا_4$$

اب $ا_.$، $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$، $ا_4$ کی بجائے $ع_.$، $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، $ع_4$ درج کرنے سے اور تحویل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ا_. لا + ا_1 = \frac{1}{گ}\left(۳ ھ^2 - \frac{ا_.^2 ع}{۴}\right)$$

۲۶ — چار درجی کی فرقوں کی مساوات اور نیم مجموعوں کی مساوات معلوم کرو (مثال ۱۲ صفحہ ۲۲۲) اور چار درجی کو صرف ایک استحالہ کے ذریعہ حل کرو۔

لا کی بجائے $لاَ + ر$ درج کرنے اور دفعہ ۶۵ کی ترقیم استعمال کرنے سے

$$ا لاَ^4 + ۴ ع_1 لاَ^3 + ۶ ع_2 لاَ^2 + ۴ ع_3 لاَ + ع_4 = ۰$$

لاَ اور ر کے لئے ایسی قیمتیں فرض کی جا سکتی ہیں کہ وہ دو مساواتوں

$$ا لاَ^4 + ۶ ع_2 لاَ^2 + ع_4 = ۰، \quad ع_1 لاَ^2 + ع_3 = ۰$$

کو پورا کریں جن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ر کی کسی قیمت کے جواب میں لاَ کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ہیں اور جب $لاَ^2$ کو ساقط کیا جاتا ہے تو ر کے لئے ہمیں چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے۔ ر اور لاَ کی قیمتوں کو اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں حاصل کرنے کے لئے فرض کرو

(152

$$ر_١ + لا_٢ = عہ ، ر_١ - لا_٢ = بہ ، جنسے ٢ر_١ = عہ + بہ ، ٢لا_٢ = عہ - بہ$$

اسلئے لا_٢ میں وہ مساوات جو ر_١ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے نیم فرقونکی مساوات ہے اور ر_١ میں چھٹے درجہ کی مساوات نیم مجموعوں کی مساوات ہے۔ دفعہ ٦٥ کے طریقہ تحویل سے موخرالذکر مساوات کو فوراً شکل ذیل میں بیان کیا جا سکتا ہے:۔

$$٤ ع_٢^٣ - ع ع_٢ + ج = ٠$$ (مثال ٢١ سے مقابلہ کرو)

چار درجی کو حل کرنیکے لئے اس آخری مساوات سے حاصل ہوتا ہے ع_٢ = ا طہ جہاں طہ محول کعبی کی ایک اصل ہے۔ پس

$$ع_١ = ر_١ + ب = \sqrt{ا_٠^٢ طہ - ھ} ، لا_٢ = \frac{-ع_٣}{ع_١} = \frac{-١}{٢ا_٠} \left(ع_١^٣ + ٣ھ + \frac{گ}{ع_١} \right)$$

جس سے بالآخر

$$ا_٠ لا + ب = ع_١ + ا_٠ لا_٢ = \sqrt{ا_٠^٢ طہ - ھ} + \sqrt{- ا_٠^٢ طہ - ٢ھ - \frac{گ}{\sqrt{ا_٠^٢ طہ - ھ}}}$$

جو ایک ایسا جملہ ہے جسکی صرف چار قیمتیں ہیں اور جسمیں چار درجی کی اصل محول کعبی کی ایک واحد اصل کی رقوم میں بیان ہوئی ہے۔

٢٧۔ ثابت کرو کہ ایک دی ہوئی کعبی مساوات کی ایک اصل طہ کا ہر منطق جبری تفاعل عام طور پر شکل

$$\frac{ج_٠ + ج_١ طہ}{د_٠ + د_١ طہ}$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل $\frac{فہ(طہ)}{پہ(طہ)}$ ہے جہاں فہ(طہ) اور پہ(طہ) طہ کے کسی درجہ کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔ دئے ہوئے کعبی کو متواتر تحویل کرنے سے انمیں سے ہر ایک تفاعل دو درجی تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس دیا ہوا تفاعل

شکل

$$\frac{ج. + ج_1 ط + ج_2 ط^2}{د. + د_1 ط + د_2 ط^2}$$

میں تحویل ہو سکتا ہے۔ اس کو مندرجۂ بالا شکل کے مساوی رکھنے سے اور دئے ہوئے کعبی سے تحویل کرنے سے ہمیں ایک متماثلہ مساوات یعنے ل. + ل$_1$ ط + ل$_2$ ط^2 ≡ ۰ ملیگی جہاں ل.، ل$_1$، ل$_2$ خطی تفاعل ہیں ج.، ج$_1$، د.، د$_1$ کے۔ اس لئے ل. = ۰، ل$_1$ = ۰، ل$_2$ = ۰ اور ان سے ج.، ج$_1$، د.، د$_1$ کی نسبتیں ملتی ہیں۔

۲۸ ـ ثابت کرو کہ چار درجی مساوات کے حل میں جذر الکعب نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی جب اصلوں عہ، جہ، بہ، ضہ کے درمیان کوئی ایسا ربط موجود ہو جو محول کعبی کی اصل طہ کے ایک منطوق تفاعل کو صفر کے مساوی رکھنے سے بیان ہو سکے۔

طہ کے کسی منطوق تفاعل کو ہمیشہ درجہ دوم کے تفاعل میں گھٹایا جا سکتا ہے جیسا کہ مثال اسبق میں کیا گیا۔ پس طہ کو معلوم کرنے میں جذر الکعب نکالنے کی ضرورت نہیں پڑیگی اور مثال ۲۶ کے ضابطہ سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں چار درجی کی اصل کے جملہ میں کوئی جذر الکعب شامل نہیں ہوتا۔

۲۹ ـ جب مساوات

$$ر^4 - ع ر^3 + جے ر + ... = ۰$$

ر کی حسب ذیل قیمتوں میں سے کسی سے پوری ہو

(۱) $\frac{ھ}{ا}$، (۲) ج، (۳) صفر، (۴) $\frac{\sqrt{۱س - ج}}{۲}$، (۵) $\sqrt[3]{\frac{-جے}{۴}}$،

(۶) $\sqrt[3]{\frac{ع}{۱۲}}$، (۷) $\frac{۳ جے}{۲ ع}$، (۸) $\frac{اد - ب ج}{۲ ب}$

تو ہر صورت میں وہ ربط معلوم کرو جو چار درجی کی اصلوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

جوابات:- (۱) بہ + جہ - عہ - ضہ = ۰، (۲) بہ + جہ = ۰

(۳)، (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - بہ) (جہ - ضہ) = ۰،

(۴)، (۸)، بہ جہ - عہ ضہ = ۰، (۵) (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - سہ (عہ - بہ) (جہ - ضہ) =

(۶)، (۷) ب − ج = ۰

۳۰ ـــ یہ متماثلہ ثابت کرو

$$ا_{۰}^{۶}(ع^{۳} - ۲۷ ج^{۲}) \equiv (ا_{۰}^{۲} ع - ۳ ھ^{۲})(ا_{۰}^{۲} ع - ۱۲ ھ^{۲})^{۲} + ۲۷ گ^{۲} (گ^{۲} + ۲ ا_{۰}^{۳} ج)$$

اسکو اس طرح ثابت کیا جا سکتا ہے :۔ ع اور ج کی قیمتوں میں $ا_{۱} = ۰$ رکھنے سے اور پھیلانے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ Δ کا وہ حصہ جسمیں $ا_{۱}$ نہیں آتا شکل

$$ا_{۰} ا_{۴} (ا_{۰} ا_{۴} - ۹ ا_{۲}^{۲})^{۲} + ۲۷ ا_{۰} ا_{۳}^{۲} (۲ ا_{۰} ا_{۲} ا_{۴} - ا_{۰} ا_{۳}^{۲} - ۲ ا_{۲}^{۳})$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔

اب $ا_{۲}$، $ا_{۳}$، $ا_{۴}$ کی جگہ $ل_{۲}$، $ل_{۳}$، $ل_{۴}$ رکھنے سے اور ان مقداروں کی بجائے دفعہ ۷۴ کی قیمتیں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے ۔

۳۱ ـــ جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یولر کے کعبی کی دو اصلیں مساوی ہوتی ہیں جنکی مشترک قیمت

$$\frac{۳ ا ج - ۲ ھ ع}{۲ ع}$$

ہے اور پھر یہ ثابت کرو کہ اس صورت میں چار درجی کی باقی دو اصلیں حقیقی ہیں یا مساوی یا خیالی بموجب اسکے کہ $۲ ھ ع - ۳ ا ج$ منفی ہو یا صفر یا مثبت ۔

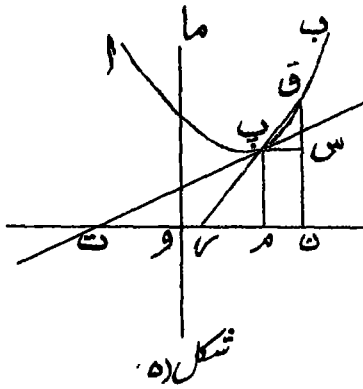
۳۲ ـــ ثابت کرو کہ (۱) جب چار درجی کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو مربع دار فرقوں کی مساوات کی آخری دو رقمیں (دفعہ ۶۷) معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں $\Delta = ۰$، $۲ ھ ع - ۳ ا ج = ۰$ حاصل ہوتی ہیں اور یہ کہ (۲) جب اسکی تین اصلیں مساوی ہوں تو اس مساوات کی آخری تین رقمیں معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں $ع = ۰$، $ج = ۰$ حاصل ہوتی ہیں ۔

قبل الذکر صورت میں بتاؤ کہ یہ شرطیں اُن شرطوں کے ساتھ مماثلت رکھتی ہیں جو مثال ۳ دفعہ ۶۱ اور مثال ۱۲ صفحہ (۲۱۷) میں حاصل ہوئی ہیں ۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مربع دار فرقوں کی مساوات قبل الذکر صورت میں فہ^{۲} (ا^{۲} فہ + ۱۲ ھ)^{۲} میں اور موخر الذکر صورت میں فہ^{۳} (ا^{۲} فہ + ۱۶ ھ)^{۲} میں تحویل ہوتی ہے۔

(154)

ساتواں باب

مشتق تفاعلوں کے خواص

۶۹ـ مشتق تفاعل کی ترسیمی تعبیر

فرض کرو کہ کثیرالارقام ف (لا) کو تعبیر کرنیوالا منحنی ا پ ب ہے اور اس پر پ وہ نقطہ ہے جو متغیر لا = و م کی کسی قیمت کے جواب میں ملتا ہے اب ہم نقطہ پ پر فَ (لا) کی قیمت تعبیر کرنیکا طریقہ معلوم کرینگے ـ منحنی پر دوسرا

شکل (۵)

نقطہ ق لو جو لا کی ایسی قیمت کے جواب میں ہو جو و م سے بقدر ایک چھوٹی مقدار ہ کے بڑی ہو ـ اس طرح

و م = لا، م ن = ہ، و ن = لا + ہ

نیز پ م = ف (لا)، ق ن = ف (لا + ہ)

دفعہ ۶ کے پھیلاؤ کی رو سے

ف (لا + ہ) = ف (لا) + فَ (لا) ہ + $\frac{\text{فً (لا)}}{۱ \times ۲}$ ہ^۲ + ...

یعنی $\frac{\text{ف (لا + ہ) - ف (لا)}}{\text{ہ}}$ = فَ (لا) + $\frac{\text{فً (لا)}}{۱ \times ۲}$ ہ + ... (۱)

لیکن $\frac{\text{ف (لا + ہ) - ف (لا)}}{\text{ہ}}$ = $\frac{\text{ق س}}{\text{م ن}}$ = $\frac{\text{ق س}}{\text{پ س}}$

= مس ق پ س = مس پ ر ن

اب اگر ہ کو غیر محدود گھٹا دیا جائے تو ق، پ کے نزدیک آتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے؛ وتر پ ق، نقطہ پ پر منحنی کا مماس بنجاتا ہے؛ زاویہ پ ر ن، پ ت م ہو جاتا ہے۔ نیز مساوات (۱) کی دائیں جانب کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے غیر محدود گھٹ جاتی ہیں اور بالآخر ہ = ۰ کے لئے معدوم ہوتی ہیں۔ اس لئے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

مس پ ت م = فَ (لا)

جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ لا کی کسی قیمت کو درج کرنے سے مشتق تفاعل فَ (لا) جو قیمت اختیار کرتا ہے وہ اُس زاویہ کے مماس سے تعبیر ہوتی ہے جو تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرنیوالے منحنی کے متناظر نقطہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

۰۷۔ **کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔** لا کی کوئی قیمت جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بنا دے مشتق مساوات فَ (لا) = ۰ کی ایک اصل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ لا کو قیمت ع دینے سے ف (لا) اقل ہوتا ہے ہم ثابت کرینگے کہ فَ (لا) = ۰۔ فرض کرو کہ ہ سے لا کا چھوٹا اضافہ یا چھوٹا گھٹاؤ تعبیر ہوتا ہے۔ اب چونکہ ف (ع) اقل ہے اسلئے

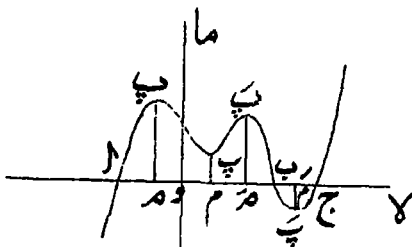
(155)

ف (عہ) < ف (عہ + ہ)، نیز ف (عہ) < ف (عہ - ہ)

پس ف (عہ + ہ) - ف (عہ) اور ف (عہ - ہ) - ف (عہ) دونوں مثبت ہیں یعنی ذیل کے دو جملے مثبت ہیں :-

فَ (عہ) ہ + (فً (عہ) ÷ ۱ × ۲) ہ۲ + ...،

- فَ (عہ) ہ + (فً (عہ) ÷ ۱ × ۲) ہ۲ - ......

اب ہم یہ جانتے ہیں کہ جب، ہ بہت چھوٹا ہو تو ان جملوں کی علامتیں وہی ہوتی ہیں جو انکی پہلی رقموں کی ہیں۔ پس دونوں جملوں کو مثبت ہونےکے لئے فَ (عہ) کو معدوم ہونا چاہیئے اور علاوہ ازیں فً (عہ) کو مثبت ہونا چاہیئے بالکل اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ جب، ف (عہ) اعظم ہو تو فَ (عہ) = ۰ اور فً (عہ) کو منفی ہونا چاہیئے۔ اسلئے کثیر الارقام ف (لا) کی اعظم اور اقل قیمتوں کو معلوم کرنےکے لئے مساوات فَ (لا) = ۰ کو حل کر کے اسکی اصلوں کو ف (لا) میں درج کرنا چاہیئے۔ ہر اصل سے ایک اعظم یا اقل قیمت ملیگی اور اعظم یا اقل قیمت کا امتیاز فً (لا) کی علامت سے ہوگا جب اسمیں لا کی بجائے وہ اصل درج کیجائے چنانچہ جب، فً (لا) منفی ہو تو قیمت اعظم ہوگی اور جب، فً (لا) مثبت ہو تو قیمت اقل۔ (156)

اس دفعہ کا مسئلہ دفعہ ۶۹ کے عمل سے فوراً حاصل ہوتا ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ جب، ف (لا) کی قیمت اعظم ہو جیسے پ، پَ

شکل (۶)

(شکل ۶) پر یا اقل ہو جیسے پ، پَ پر تو منحنی کا مماس محور و لا کے متوازی ہوگا اور اس لئے

مس پ ات مہ = فَ (لا) = ۰

شکل ۶ پانچویں درجہ کے کثیرالارقام کو تعبیر کرتی ہے۔ فَ (لا) = ۰ کی چار اصلوں کے جواب میں (جنکا حقیقی ہونا اس صورت میں فرض کرلیا گیا ہے) یعنی و مہ، دم، و مَہ، ومَ کے جواب میں دو اعظم قیمتیں مہ پ، مَہ پا اور دو اقل قیمتیں م پ، مَ پَ ہیں۔

مثالیں

۱۔ ف (لا) ≡ ۲ لا^۲ + لا − ۶

کی اعظم یا اقل قیمت معلوم کرو۔

فَ (لا) = ۴ لا + ۱، فً (لا) = ۴

لا = − ۱/۴ سے ف (لا) = − ۴۹/۸ اور یہ اقل قیمت ہے۔

(دیکھو شکل ۲ صفحہ ۲۰)

۲۔ ف (لا) ≡ ۲ لا^۳ − ۳ لا^۲ − ۳۶ لا + ۱۴

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

فَ (لا) = ۶ (لا^۲ − لا − ۶)، فً (لا) = ۶ (۲ لا − ۱)،

لا = − ۲ سے ف (لا) = ۶۸ جو اعظم قیمت ہے۔

لا = ۳ سے ف (لا) = − ۶۷ جو اقل قیمت ہے۔

۳۔ ف (لا) ≡ ۳ لا^۴ − ۱۶ لا^۳ + ۶ لا^۲ − ۴۸ لا + ۷

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

یہاں فَ (لا) = ۰ کی صرف ایک حقیقی اصل ہے لا = ۴، اور اس سے اقل قیمت حاصل ہوتی ہے ف (لا) = − ۲۴۵۔

۴۔ ف (لا) ≡ ۱۰ لا^۳ − ۱۷ لا^۲ + لا + ۶

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

ف َ (لا) کی اصلیں تقریبی طور پر ۲۰۳ء۰، ۰۱ء۳۱ ہیں۔ پہلی اصل سے اعظم قیمت اور دوسری سے اقل قیمت حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو شکل ۳ صفحہ ۲۱)۔

۱۷ — رول کا مسئلہ — مساوات ف (لا) = ۰ کی دو متصلہ حقیقی اصلوں ا اور ب کے درمیان مساوات ف َ (لا) = ۰ کی کم از کم ایک حقیقی اصل واقع ہوتی ہے۔

چونکہ ف (لا) کو مسلسل تفاعل مان لیا گیا ہے اسلئے جب لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے تو ف (ا) سے ف (ب) تک جاتے ہیں ف (لا) کو ابتداً بڑھنا اور پھر گھٹنا چاہیئے یا ابتداً گھٹنا اور پھر بڑھنا چاہیئے۔ ایس لئے ف (ا) سے ف (ب) تک جانے میں اس کو کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت میں سے گذرنا چاہیئے۔ یہ قیمت (فرض کرو ف (مہ)) ا اور ب کے درمیان لا کی کسی قیمت مہ کے جواب میں ہوگی جو دفعہ ۷ کے مسئلہ سے مساوات ف َ (لا) = ۰ کی ایک اصل ہے۔

دفعہ ماسبق کی شکل سے اس مسئلہ کی توضیح ہوتی ہے۔ ہم اس شکل میں دیکھتے ہیں کہ دو نقاط تقاطع ا اور ب کے درمیان تین اعظم یا اقل قیمتیں ہیں اور دو نقطوں ب اور ج کے درمیان ایسی صرف ایک قیمت ہے۔ شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ دو متصلہ نقاط تقاطع کے درمیان ایسی قیمتوں کی تعداد طاق ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح۔ مشتق مساوات کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان ابتدائی مساوات کی کسی اصل کا ہونا ضروری نہیں ہے اور کسی صورت میں بھی انکے درمیان ابتدائی مساوات کی ایک سے زیادہ اصل نہیں ہوسکتی

اِس مسئلہ کے پہلے حصہ سے صرف اس امر کی وضاحت ہوتی ہے کہ

ایک کثیر الارقام کی دو متصلہ صفر قیمتوں کے درمیان متعدد اعظم اور اقل قیمتیں ہو سکتی ہیں۔ اس کا دوسرا حصہ مسئلہ بالا سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ اگر $فَ(لا) = 0$ کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان $ف(لا) = 0$ کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں تو $ف(لا) = 0$ کی دو اصلیں ایسی ہونگی جن کے درمیان $فَ(لا) = 0$ کی کوئی اصل نہیں ہوگی اور یہ رول کے مسئلہ کے خلاف ہے۔

۷۲ ـ مشتق تفاعلوں کی ترکیب۔ فرض کرو کہ مساوات $ف(لا) = 0$ کی اصلیں $ع_1، ع_2، ع_3 \ldots ع_ن$ ہیں تو

$$ف(لا) \equiv (لا - ع_1)(لا - ع_2) \ldots (لا - ع_ن)$$

اس متماثلہ میں لا کی بجائے ما + لا درج کرو تو

$$ف(ما + لا) = (ما + لا - ع_1)(ما + لا - ع_2) \ldots (ما + لا - ع_ن)$$

$$= ما^ن + ق_1 ما^{ن-1} + ق_2 ما^{ن-2} + \ldots + ق_{ن-1} ما + ق_ن$$

1.58

جہاں

$$ق_1 = لا - ع_1 + لا - ع_2 + لا - ع_3 + \ldots + لا - ع_ن$$

$$ق_2 = (لا - ع_1)(لا - ع_2) + (لا - ع_1)(لا - ع_3) + \ldots + (لا - ع_{ن-1})(لا - ع_ن)$$

. . . .

$$ق_{ن-1} = (لا - ع_2)(لا - ع_3) \ldots (لا - ع_ن) + (لا - ع_1)(لا - ع_3) \ldots (لا - ع_ن) + \ldots$$

$$+ (لا - ع_1)(لا - ع_2) \ldots (لا - ع_{ن-1})$$

$$ق_ن = (لا - ع_1)(لا - ع_2) \ldots (لا - ع_ن)$$

لیکن

$$ف(ما + لا) = ف(لا) + فَ(لا) ما + \frac{فً(لا)}{2 \times 1} ما^2 + \ldots + ما^ن$$

اس لئے

ف (لا) = قن = (لا ـ ع۱) (لا ـ ع۲) ..... (لا ـ عن)

فَ (لا) = قن-۱ = (لا ـ ع۲) (لا ـ ع۳) .... (لا ـ عن) + ... جیسا اوپر لکھا گیا

$\frac{\text{فً (لا)}}{1 \times 2}$ = قن-۲ = قن-۲ کی وہ قیمت جو لا اور اصلوں کی توم میں اوپر درج ہے

فَ (لا) کی قیمت کو آسانی کے ساتھ یوں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\text{فَ (لا)} = \frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا ـ ع}_1} + \frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا ـ ع}_2} + \cdots\cdots + \frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا ـ ع}_\text{ن}}$$

۳۷ ـ ضعفی اصلیں ـ مسئلہ :- اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک ضعفی اصل م ویں رتبہ کی ہو تو یہ اصل پہلی مشتق مساوات فَ (لا) = ۰ کی (م ـ ۱) ویں رتبہ والی ضعفی اصل ہو گی ـ

دفعہ ما سبق میں فَ (لا) کے لئے جو جملہ حاصل ہوا اس سے یہ مسئلہ فوراً حاصل ہوتا ہے کیونکہ اگر ف (لا) میں جزو ضربی (لا ـ ع۱)$^\text{م}$ واقع ہو یعنی اگر ع۱ = ع۲ = ع۳ = ... = عم تو

$$\text{فَ (لا)} = \frac{\text{م ف (لا)}}{\text{لا ـ ع}_1} + \frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا ـ ع}_{\text{م}+1}} + \cdots + \frac{\text{ف (لا)}}{\text{لا ـ ع}_\text{ن}} ،$$

بائیں جملہ میں ہر رقم کا ایک جزو ضربی (لا ـ ع۱)$^\text{م}$ ہے سوائے پہلی رقم کے جسمیں (لا ـ ع۱)$^{\text{م}-1}$ جزو ضربی کے طور پر ہے ـ پس (لا ـ ع۱)$^{\text{م}-1}$، فَ (لا) کا ایک جزو ضربی ہے ـ

نتیجہ صریح ۱ ـ کوئی اصل جو مساوات ف (لا) = ۰ میں م مرتبہ واقع ہوتی ہے پہلی مشتق مساوات میں (م ـ ۱) مرتبہ، دوسری میں (م ـ ۲) مرتبہ، .... (م ـ ۱) ویں مشتق مساوات میں ایک مرتبہ واقع ہو گی ـ

چونکہ فَ (لا) سے فً (لا) اسی طرح حاصل ہوتا ہے جس طرح ف (لا) سے فَ (لا)، اسلئے ابھی ثابت کئے ہوئے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ فً (لا) میں (لا - عہ)$^{م-۲}$ جزو ضربی کے طور پر شامل ہوگا۔ تیسرے مشتق تفاعل فٌ (لا) میں (لا - عہ$_۱$)$^{م-۳}$ شامل ہوگا اور علیٰ ہذا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ف (لا) اور اسکے پہلے (م - ۱) مشتق تفاعل سب کے سب لا کی قیمت عہ کے لئے معدوم ہو جائیں تو (لا - عہ)^{م}، ف (لا) کا جزو ضربی ہوگا۔

یہ پچھلے نتیجہ صریح کا عکس ہے اور بلا واسطہ آسانی کے ساتھ یوں ثابت کیا جا سکتا ہے:۔ مشتق تفاعلوں کو ف$_۱$ (لا)، ف$_۲$ (لا)، ....، ف$_{م-۱}$ (لا) سے تعبیر کرو (دیکھو دفعہ ۶) اور لا کی بجائے عہ + لا - عہ درج کرو تو ف (لا) کو شکل ذیل میں پھیلایا جا سکتا ہے:۔

$$ف(عہ) + ف_۱(عہ)(لا - عہ) + \frac{ف_۲(عہ)}{۱ \times ۲}(لا - عہ)^۲ + \dots\dots$$

$$+ \frac{ف_{م-۱}(عہ)}{۱\times۲\times\dots\times(م-۱)}(لا - عہ)^{م-۱} + \frac{ف_م(عہ)}{۱\times۲\times\dots\times م}(لا - عہ)^م + \dots\dots$$

$$+ \frac{ف_ن(عہ)}{۱\times۲\times\dots\times ن}(لا - عہ)^ن$$

جس سے مسئلہ کی صداقت ظاہر ہے۔

۷ ۔ ضعفی اصلوں کی تعیین۔ پچھلے دفعہ سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جا سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور فَ (لا) کا مشترک جزو ضربی (لا - عہ)$^{م-۱}$ ہو تو (لا - عہ)^{م}، ف (لا) کا ایک جزو ہوگا۔ کیونکہ نتیجہ صریح (۱) کی رو سے

فَ (لا) کے بعد کے (م - ۳) مشتق تفاعل، ف (لا) اور فَ (لا) کے ساتھ معدوم ہوتے ہیں جبکہ لا = عہ۔ پس ف (لا) کی ایک اصل م رتبہ کی ہے۔

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور فَ (لا) کے دوسرے مشترک اجزائے ضربی

(لا - بہ)^ف-۱ ، (لا - جہ)^ق-۱ ، (لا - ضہ)^ر-۱ ، وغیرہ

ہوں تو مساوات ق (لا) = ۰ کی ف اصلیں بہ کے مساوی ہونگی، ق اصلیں جہ کے مساوی، ر اصلیں ضہ کے مساوی، وغیرہ۔

اسلئے یہ معلوم کرنیکے لئے کہ کسی مجوزہ مساوات کی ضعفی اصلیں موجود ہیں یا نہیں اور اگر موجود ہیں تو انکی تعیین کے لئے ہمیں ف (لا) اور فَ (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہیئے۔ فرض کرو یہ فہ (لا) ہے تو مساوی اصلونکی تعیین مساوات فہ (لا) = ۰ کے حل پر منحصر ہوگی۔

160)

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - ۱۶ لا + ۲۰ = ۰$$

کی ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - ۲ ہے۔ پس $(لا - ۲)^۲$،

ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ دوسرا جزو لا + ۵ ہے۔

ف (لا) کے ضعفی اجزائے ضربی کو معلوم کرنیکے بعد اگر باقی اجزائے ضربی حاصل کرنا ہو تو دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ متواتر استعمال کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مثلاً یہاں ہم لا - ۲ سے دو مرتبہ تقسیم کرتے ہیں، عمل حساب کا طریقہ ذیل میں درج ہے:-

۱	۱	-۱۶	۲۰
	۲	۶	-۲۰
۱	۳	-۱۰	۰
	۲	۱۰	
۱	۵	۰	

اس طرح دوسرا اور ۵ باقی رہ جاتے ہیں یعنے تیسرا جزو ضربی لا + ۵ ہے۔ اس عمل سے گذشتہ نتیجہ کی تصدیق ہوتی ہے کہ ہر تقسیم کے بعد باقی معدوم ہوتے ہیں جیساکہ ہونا چاہیئے۔

۲۔ مساوات

$$لا^{۵} - ۱۰ لا^{۲} + ۱۵ لا - ۶ = ۰$$

کی ضعفی اصلیں اور بقیہ جزو ضربی معلوم کرو۔

ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم $لا^{۲} - ۲ لا + ۱$ ہے۔ پس $(لا - ۱)^{۳}$ ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ لا − ۱ سے تین مرتبہ متواتر تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$ف(لا) \equiv (لا - ۱)^{۳} (لا^{۲} + ۳ لا + ۶)$$

۳۔ مساوات

$$لا^{۴} - ۲ لا^{۳} - ۱۱ لا^{۲} + ۱۲ لا + ۳۶ = ۰$$

کی ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم $لا^{۲} - لا - ۶$ ہے۔ اس کے اجزا لا + ۲ اور لا − ۳ ہیں۔ پس

$$ف(لا) \equiv (لا + ۲)^{۲} (لا - ۳)^{۲}$$

۴۔ کثیر الارقام

$$ف(لا) \equiv لا^{۶} - ۵ لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + ۹ لا^{۳} - ۱۴ لا^{۲} - ۴ لا + ۸$$

کے تمام اجزائے ضربی معلوم کرو۔

جواب:- $ف(لا) \equiv (لا - ۱)(لا + ۱)^{۲}(لا - ۲)^{۳}$

کثیر الارقام اور اسکے پہلے مشتق کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنیکا معمولی عمل بہت محنت طلب ہوتا جائیگا جیسے جیسے تفاعل کا درجہ بڑھتا جائیگا۔ اسلئے یہ کہنا (جیسا کہ مساواتوں کے نظریہ کی اکثر کتابوں میں کہا جاتا ہے) غلط ہے کہ عددی مساواتوں کی ضعفی اصلوں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ سادہ طریقہ ہے اور یہ کہ اصلوں کے متعلق مزید تحقیقات کے لئے ضروری ہے۔ اسٹرم (Sturm) کے مسئلہ کے سلسلہ میں اس طریقہ کی کچھ عملی قدر و قیمت ہے۔ ہم ضعفی اصلوں کی بحث کو دسویں باب تک ملتوی کرتے ہیں جہاں اس مسئلہ پر

(161)

غور کیا جائیگا۔ نیز گیارہویں باب میں یہ بتایا جائیگا کہ چھٹے درجہ سے کم درجوں کی مساواتوں کی ضعفی اصلیں کسی مخصوص مثال میں، سادہ طریقوں سے معلوم ہو سکتی ہیں جنمیں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

۵۷ ۔ اس دفعہ اور اگلے دفعہ میں وہ مسئلے بیان کئے جائینگے جو مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنیکے طریقوں کی آئیوالی بحث میں بہت اہم اور کار آمد ثابت ہونگے۔

مسئلہ۔ مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصل عہ سے ذرا چھوٹی لا کی قیمت عہ ۔ ہ سے ذرا بڑی قیمت عہ + ہ تک مسلسل گذرنے میں کثیر الارقام ف (لا) اور فَ (لا) کی علامتیں اصل میں سے گذرنے سے عین پہلے مختلف ہوتی ہیں اور گذرنیکے عین بعد موافق۔

ف (لا) اور فَ (لا) میں لا کی بجائے عہ ۔ ہ درج کرنے سے اور اور پھیلانے سے

$$ف(عہ - ہ) = ف(عہ) - فَ(عہ) ہ + \frac{فً(عہ)}{۱ \times ۲} ہ^۲ - \ldots\ldots$$

$$فَ(عہ - ہ) = فَ(عہ) - فً(عہ) ہ + \ldots\ldots$$

اب چونکہ ف (عہ) = ۰ اسلئے ان جملوں کی علامتیں انکی پہلی رقموں پر منحصر ہونگی وجہ سے مختلف ہیں۔ اگر ہ کی علامت بدلدیجائے تو ان جملوں کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہوگیا۔

نتیجہ صریح۔ مسئلہ بالا درست رہتا ہے جب 'عہ' مساوات ف (لا) = ۰ کی کسی رتبہ کی ضعفی اصل ہو۔

فرض کرو کہ اصل ر مرتبہ تکرار پاتی ہے تو ذیل کے تفاعل (جنمیں زیر کی بجائے لاحقے استعمال ہوئے ہیں) سب کے سب معدوم ہوتے ہیں:۔

$$ف(عہ)، ف_۱(عہ)، ف_۲(عہ)، \ldots\ldots، ف_{ر-۱}(عہ)$$

(162)

ف (عہ - ہ) اور فَ (عہ - ہ) کے سلسلوں میں وہ پہلی رقمیں جو معدوم نہیں ہوتیں یہ ہیں

$$\frac{ف_ر(عہ)}{1\times 2\times \ldots \times ر}(-ہ)^{ر}،\quad \frac{ف_ر(عہ)}{1\times 2\times 3\times \ldots \times (ر-1)}(-ہ)^{ر-1}$$

ظاہر ہے کہ اِنکی علامتیں مختلف ہیں، لیکن جب ہ کی علامت کو تبدیل کیا جاتا ہے تو اِن رقموں کی علامتیں وہی ہو جاتی ہیں ـ پس مسئلہ درست ہے۔

۶۷ ـــ سلسلہ

ف (لا)، فَ (لا)، فَ$_2$ (لا)، فَ$_3$ (لا)، ....، فَ$_{ر-1}$ (لا)،

کے ہر دو متصل تفاعلوں پر دفعہ ماسبق کا استدلال جاری کیا جائے تو مسئلہ کو عام صورت میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:۔

مسئلہ ـ جب کسی مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ر رتبہ کی ہو اور عہ سے ذرا کم قیمت لا کو دیجائے تو اِس سلسلہ کے ر تفاعلوں کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی یا منفی اور مثبت ہونگی لیکن عہ سے ذرا بڑی قیمت لا کو دیجائے تو یہ سب تفاعل ہم علامت ہونگے اور مزید بریں یہ علامت وہی ہوگی جو ف$_ر$ (عہ) کی ہے یعنی اُس پہلے تفاعل کی جو لا کی بجائے عہ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا۔

اس مسئلہ کے استعمال کو پوری طرح ذہن نشین کرنے کے لئے فرض کرو کہ ف$_5$ (عہ) وہ پہلا تفاعل ہے جو لا کی بجائے عہ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا اور فرض کرو کہ اسکی علامت منفی ہے ـ اس مسئلہ سے جو نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے وہ یہ ہے کہ لا کی قیمت عہ - ہ کے لئے تفاعلوں کے سلسلہ ف، فَ، فَ$_2$، فَ$_3$، فَ$_4$، فَ$_5$ کی علامتیں ہیں

- + - - + - - +

اور لا کی قیمت ع + ہ کے لئے اِنکی علامتیں ہیں

- - - - - - - -

کیونکہ اصل میں سے گذرنے سے پہلے ف$_{ہ}$ کی علامت ف$_{ہ}$ کی علامت سے مختلف ہونی چاہیئے، ف$_{س}$ کی علامت ف$_{ہ}$ سے مختلف ہونی چاہیئے اور علیٰ ہذا۔ اور اصل میں سے گذرنیکے بعد سب تفاعلوں کی علامتیں وہی ہونی چاہیں۔ یہاں ہم نے فی الحقیقت یہ تسلیم کیا ہے کہ ہ اسقدر چھوٹا ہے کہ ف$_{ہ}$ (لا) = ۰ کی کوئی اصل اس وقفہ کے اندر داخل نہیں ہوتی جسمیں سے لا گذرتا ہے۔

(163)

مثالیں

۱۔ مساوات

ف (لا) ≡ لا^{۴} + ۱۲ لا^{۳} + ۳۲ لا^{۲} - ۲۴ لا + ۴ = ۰

کی ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

جواب:- ف (لا) ≡ (لا^{۲} + ۶ لا - ۲)^{۲}

۲۔ ثابت کرو کہ ثنائی مساوات

لا^{ن} - ر^{ن} = ۰

میں مساوی اصلیں نہیں ہوسکتیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

لا^{ن} - ن ق لا + (ن - ۱) ر = ۰

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

ق^{ن} = ر$^{ن-۱}$

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{۵} + ۵ ف لا^{۳} + ۵ ف^{۲} لا + ق = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر $ق^{۲} + ۴ ف^{۵} = ۰$۔ اور یہ کہ اگر مساوی اصلوں کا ایک زوج موجود ہو تو مساوی اصلوں کا ایک دوسرا زوج بھی موجود ہونا چاہئے۔

۵ — دفعہ ۴۷ کا طریقہ استعمال کرکے وہ شرط معلوم کرو کہ کعبی مساوات

$$ی^{۳} + ۳ ھ ی + گ = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہوں۔

مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنیکے عمل میں آخری باقی کو معدوم ہوجانا چاہئے۔

جواب:- $گ^{۲} + ۴ ھ^{۳} = ۰$

۶ — اسی طریقہ کو استعمال کرکے بتاؤ کہ گ اور ھ دونوں معدوم ہوتے ہیں جب کعبی کی تین اصلیں مساوی ہوں۔

۷ — اگر چار درجی ف (لا) = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ف'(عہ) + ف'(بہ) + ف'(جہ) + ف'(ضہ)$$

کو تین اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

جواب:- (عہ + بہ − جہ − ضہ) (عہ + جہ − بہ − ضہ) (عہ + ضہ − بہ − جہ)

۸ — اگر ف (لا) = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ ہوں اور ف' (لا) = ۰ کی اصلیں عہ'، بہ'، جہ'، ضہ' وغیرہ تو ثابت کرو کہ

$$ف'(عہ) ف'(بہ) ف'(جہ) ف'(ضہ) \ldots = ن^{ن} ف(عہ') ف(بہ') ف(جہ') \ldots$$

اور یہ کہ ہر ایک اُس مساوات کی رقم مطلق کے مساوی ہے جسکی اصلیں فرقوں کے مربع ہیں۔

۹ — اگر مساوات

$$لا^{ن} + ف_{۱} لا^{ن-۱} + ف_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن} = ۰$$

کی ایک دوہری اصل عہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ، مساوات

$$ف_{۱} لا^{ن-۱} + ۲ ف_{۲} لا^{ن-۲} + ۳ ف_{۳} لا^{ن-۳} + \ldots + ن ف_{ن} = ۰$$

164)

کی ایک اصل ہے۔

۱۰۔ بتاؤ کہ کعبی

ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

ا^{۲} ر^{۲} − ۲ گ ر + Δ = ۰

کی اصلیں ہیں جہاں Δ ممیز ہے۔

ف (لا) کو تعبیر کرنیوالے منحنی کو اگر محور یا کے متوازی (دیکھو دفعہ ۱۰) اعظم یا اقل قیمت ر کے مساوی فاصلے میں سے حرکت دیجائے تو محور لا منحنی کا مماس ہو جائیگا یعنی مساوات ف (لا) − ر = ۰ مساوی اصلیں رکھے گی۔ پس اعظم اور اقل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ف (لا) − ر کا ممیز بنانے سے یا گ^{۲} + ۴ ھ^{۳} = ۰ میں د کی بجائے د − ر رکھنے سے۔

۱۱۔ اسی طرح ثابت کرو کہ

ا لا^{۴} + ۴ ب لا^{۳} + ۶ ج لا^{۲} + ۴ د لا + س

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

ا^{۳} ر^{۳} − ۳ (ا^{۲} ع − ۹ ھ^{۲}) ر^{۲} + ۳ (ا ع^{۲} − ۱۸ ھ جے) ر − Δ = ۰

کی اصلیں ہیں جہاں Δ چار درجی کا ممیز ہے۔

۱۲۔ تفاعل

ف (لا) ≡ لا^{۴} − ۷ لا^{۳} + ۱۵ لا^{۲} − ۱۳ لا + ۴

پر دفعہ ۶۷ کا مسئلہ استعمال کرو۔

یہاں

ف$_{۱}$ (لا) = ۴ لا^{۳} − ۲۱ لا^{۲} + ۳۰ لا − ۱۳،

ف$_{۲}$ (لا) = ۲ (۶ لا^{۲} − ۲۱ لا + ۱۵)،

ف$_{۳}$ (لا) = ۲ (۱۲ لا − ۲۱)،

ف$_{۴}$ (لا) = ۲۴

یہاں ف$_{۴}$ (لا) پہلا تفاعل ہے جو معدوم نہیں ہوتا جبکہ لا = ۱، اور

ف۳ (۱) منفی ہے۔ مسئلہ سے یہ ثابت ہے کہ ایک سے ذرا کم قیمت کے لئے ف، ف۱، ف۲، ف۳ کی علامتیں ہیں + - + -، اور ایک سے ذرا بڑی قیمت کے لئے ان سب کی علامتیں منفی ہیں۔ علامتوں کے اس سلسلہ سے ہم تفاعلوں ف، ف۱، وغیرہ کو نقطہ لا = ۱ کے قرب میں مرتسم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ ف (لا) کو تعبیر کرنیوالا منحنی ضعفی نقطہ لا = ۱ تک پہنچنے سے قبل محور لا کے اوپر ہے اور پہنچنے کے عین بعد محور کے نیچے اور محور منحنی کو تین منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے کیونکہ ف (لا) کا ایک جزو ضربی (لا - ۱)۳ ہے۔ ف۱ (لا) کو تعبیر کرنیوالا منحنی نقطہ لا = ۱ میں سے گذرنے سے پہلے اور بعد دونوں صورتوں میں محور کے اوپر ہوگا۔ وہ محور کو اِس نقطہ پر مس کریگا۔ ف۲ (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی نقطہ میں سے گذرتے سے پہلے محور کے اوپر اور گذرنیکے بعد محور کے نیچے ہوگا اور محور کو اس نقطہ پر قطع کریگا۔

(165)

آٹھواں باب

اصلوں کے متشاکل تفاعل

۷۷ ۔ نیوٹن کا مسئلہ ۔ اصلوں کی قوتوں کے مجموعے ۔

اب ہم مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی بحث کی طرف رجوع کرتے ہیں ۔ اِن کا کچھ ذکر پہلے (دفعہ ۲۷) میں آچکا ہے یہاں ہم اِن تفاعلوں سے متعلق چند عام مسائل ثابت کرینگے ۔

مسئلہ ۱ ۔ کسی مساوات کی اصلوں کی متشابہ قوتوں کے مجموعے سروں کے رقوم میں منطق طور پر بیان ہو سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}}$$

$$\equiv (\text{لا} - \text{ع}_{۱})(\text{لا} - \text{ع}_{۲})(\text{لا} - \text{ع}_{۳})\cdots(\text{لا} - \text{ع}_{\text{ن}}) = ۰$$

اب ہم سروں $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$، ..... $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی رقوم میں $\Sigma\text{ع}$، $\Sigma\text{ع}^{۲}$، $\Sigma\text{ع}^{۳}$، ......، $\Sigma\text{ع}^{\text{م}}$ کو یعنی عام ترقیم کے مطابق $\text{س}_{۱}$، $\text{س}_{۲}$، $\text{س}_{۳}$ .....، $\text{س}_{\text{م}}$ کو محسوب کرینگے ۔

دفعہ ۲۷ کی رو سے

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ع}_{۱}} + \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ع}_{۲}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ع}_{\text{ن}}}$$

$$\equiv \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ن}-1)\,\text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ن}-2)\,\text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \ldots + 2\,\text{ب}_{\text{ن}-2}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}-1}$$

اور دفعہ ۸ کے طریقہ سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}} = \begin{array}{l|l|l|l}
\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{عہ} & \text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{عہ}^2 & \text{لا}^{\text{ن}-3} + \text{عہ}^3 & \text{لا}^{\text{ن}-4} + \ldots + \text{عہ}^{\text{ن}-1} \\
+\text{ب}_1 & +\text{ب}_1\text{عہ} & +\text{ب}_1\text{عہ}^2 & +\text{ب}_1\text{عہ}^{\text{ن}-2} \\
 & +\text{ب}_2 & +\text{ب}_2\text{عہ} & +\text{ب}_2\text{عہ}^{\text{ن}-3} \\
 & & +\text{ب}_3 & +\ldots\ldots \\
 & & & \ldots\ldots \\
 & & & +\text{ب}_{\text{ن}-2}\text{عہ} \\
 & & & +\text{ب}_{\text{ن}-1}
\end{array}$$

اگر اس مساوات میں عہ کی بجائے مقداروں عہ_1، عہ_2، ....، $\text{عہ}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک یکے بعد دیگرے رکھدیجائے اور اگر $\text{س}_{\text{ق}} = \sum \text{عہ}^{\text{ق}} = \text{عہ}_1^{\text{ق}} + \text{عہ}_2^{\text{ق}} + \text{عہ}_3^{\text{ق}} + \ldots + \text{عہ}_{\text{ن}}^{\text{ق}}$ تو ان تمام نتیجوں کو جمع کرنے سے $\text{ف}'(\text{لا})$ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوگی :-

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \begin{array}{l|l|l|l}
\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{س}_1 & \text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{س}_2 & \text{لا}^{\text{ن}-3} + \text{س}_3 & \text{لا}^{\text{ن}-4} + \ldots + \text{س}_{\text{ن}-1} \\
+\text{ن}\,\text{ب}_1 & +\text{ب}_1\text{س}_1 & +\text{ب}_1\text{س}_2 & +\text{ب}_1\text{س}_{\text{ن}-2} \\
 & +\text{ن}\,\text{ب}_2 & +\text{ب}_2\text{س}_1 & +\text{ب}_2\text{س}_{\text{ن}-3} \\
 & & +\text{ن}\,\text{ب}_3 & +\ldots\ldots \\
 & & & \ldots\ldots \\
 & & & +\text{ب}_{\text{ن}-2}\text{س}_1 \\
 & & & +\text{ن}\,\text{ب}_{\text{ن}-1}
\end{array}$$

اب ف′(لا) کی اِس قیمت کا مقابلہ اسکی قبل الذکر قیمت کے ساتھ کیا جائے تو ہمیں ذیل کے ربط ملینگے:-

$$س_1 + ب_1 = ۰،$$
$$س_2 + ب_1 س_1 + ۲ ب_2 = ۰،$$
$$س_3 + ب_1 س_2 + ب_2 س_1 + ۳ ب_3 = ۰،$$
$$س_4 + ب_1 س_3 + ب_2 س_2 + ب_3 س_1 + ۴ ب_4 = ۰،$$

. . . .

$$س_{ن-۱} + ب_1 س_{ن-۲} + ب_2 س_{ن-۳} + \dots + ب_{ن-۲} س_1 + (ن-۱) ب_{ن-۱} = ۰،$$

پہلی مساوات سے $ب_1$، $ب_2$، $ب_3$، ....، $ب_ن$ کی رقوم میں $س_1$ معلوم ہوتا ہے، دوسری سے $س_2$، تیسری سے $س_3$، اور علیٰ ہذا القیاس یہانتک کہ $س_{ن-۱}$ معلوم ہوجاتا ہے۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں

$$س_1 = -ب_1،\quad س_2 = ب_1^2 - ۲ ب_2،\quad س_3 = -ب_1^3 + ۳ ب_1 ب_2 - ۳ ب_3،$$
$$س_4 = ب_1^4 - ۴ ب_1^2 ب_2 + ۴ ب_1 ب_3 + ۲ ب_2^2 - ۴ ب_4،$$
$$س_5 = -ب_1^5 + ۵ ب_1^3 ب_2 - ۵ ب_1^2 ب_3 - ۵(ب_2^2 - ب_4) ب_1 + ۵(ب_2 ب_3 - ب_5)،$$

. . . .

یہ بتانے کے بعد کہ $س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_{ن-۱}$ کو کس طرح سروں کی رقوم میں محسوب کیا جاسکتا ہے ہم اب اپنے نتیجوں کی ایسی توسیع کرتے ہیں کہ اس سے اصلوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعے معلوم کئے جاسکیں۔ (167) اس مقصد کے لئے ف(لا) کو $لا^{م-ن}$ سے ضرب دو تو

$$لا^{م-ن} ف(لا) \equiv لا^م + ب_1 لا^{م-۱} + ب_2 لا^{م-۲} + \dots + ب_ن لا^{م-ن}،$$

اس تماثلہ میں لا کو یکے بعد دیگرے $ع_۱، ع_۲، ع_۳، \ldots\ldots ع_ن$ میں بدل کر جمع کیا جائے تو

$$س_م + ب_۱ س_{م-۱} + ب_۲ س_{م-۲} + \ldots\ldots + ب_ن س_{م-ن} = ۰$$

اب م کو یکے بعد دیگرے ن، ن+۱، ن+۲، ..... قیمتیں دینے سے اور $س_۰ = ن$ کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں اس آخری مساوات سے ذیل کے ربط ملینگے۔

$$س_ن + ب_۱ س_{ن-۱} + ب_۲ س_{ن-۲} + \ldots\ldots + ن ب_ن = ۰،$$

$$س_{ن+۱} + ب_۱ س_ن + ب_۲ س_{ن-۱} + \ldots\ldots + ب_ن س_۱ = ۰،$$

$$س_{ن+۲} + ب_۱ س_{ن+۱} + ب_۲ س_ن + \ldots\ldots + ب_ن س_۲ = ۰،$$

....

پس اصلوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعوں کو سروں کے منطق تفاعلوں سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز دی ہوئی مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تحویل کرنے سے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں $ع_۱، ع_۲، ع_۳، \ldots ع_ن$ کے متکافی ہوں اور اوپر کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اصلوں کی تمام منفی قوتوں کو بھی اسی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

۷۸ ۔ مسئلہ ۲ ۔ کسی جبری مساوات کی اصلوں کے ہر منطق متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

اس مسئلہ کو صرف صحیح تفاعلوں کے لئے ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ کسری متشاکل تفاعلوں کو ایک واحد کسر میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا شمارکنندہ اور نسب نما دونوں صحیح متشاکل تفاعل ہوں۔ $ع_۱، ع_۲، ع_۳، \ldots\ldots ع_ن$ کا ہر صحیح تفاعل، شکل $ت\, ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر} \ldots\ldots$ کی رقموں کا مجموعہ ہوتا ہے

جہاں ن ایک عددی مستقل ہے، اور اگر یہ تفاعل متشاکل ہو تو ہم اس کو شکل
$\sum$ ن $ع_۱^ف ع_۲^ق ع_۳^ر$ .... یعنی ن $\sum ع_۱^ف ع_۲^ق ع_۳^ر$ .... میں لکھ سکتے
ہیں کیونکہ تمام رقمیں ایک ہی نمونہ کی ہونگی۔ اسلئے اگر ہم یہ ثابت کر دیں کہ اس
مقدار کو سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے تو مسئلہ ثابت ہو جاتا
ہے۔ پہلے ہم متشاکل تفاعل $\sum ع_۱^ف ع_۲^ق$ کی حسب ذیل قیمت ثابت کرینگے۔

$$\sum ع_۱^ف ع_۲^ق = س_ف س_ق - س_{ف+ق} \quad ....(۱)$$

168)

اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم $س_ف$ اور $س_ق$ کو باہم ضرب دیتے ہیں جہاں

$$س_ف = ع_۱^ف + ع_۲^ف + ع_۳^ف + ... + ع_ن^ف ،$$

$$س_ق = ع_۱^ق + ع_۲^ق + ع_۳^ق + ... + ع_ن^ق$$

جس سے

$$س_ف س_ق = ع_۱^{ف+ق} + ع_۲^{ف+ق} + ... + ع_ن^{ف+ق} + ع_۱^ف ع_۲^ق + ع_۱^ق ع_۲^ف + ...$$

یا $$س_ف س_ق = س_{ف+ق} + \sum ع_۱^ف ع_۲^ق$$

جو دوہرے تفاعل $\sum ع_۱^ف ع_۲^ق$ کو واحد تفاعلوں $س_ف$، $س_ق$، $س_{ف+ق}$
کی رقوم میں مندرجہ بالا شکل میں بیان کرتا ہے۔
اب ہم تہرے تفاعل کے لئے اسی طرح کا جملہ ثابت کرتے ہیں یعنی

$$\sum ع_۱^ف ع_۲^ق ع_۳^ر = س_ف س_ق س_ر - س_{ق+ر} س_ف - س_{ر+ف} س_ق - س_{ف+ق} س_ر + ۲ س_{ف+ق+ر} \quad ....(۲)$$

$\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق}$ اور $س_ر$ کو باہم ضرب دینے سے جہاں

$$\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} = ع_1^{ف} ع_2^{ق} + ع_1^{ق} ع_2^{ف} + ع_1^{ف} ع_3^{ق} + \dots\dots$$

$$س_ر = ع_1^{ر} + ع_2^{ر} + ع_3^{ر} + \dots + ع_ن^{ر} ،$$

ہمیں تین مختلف حصوں پر مشتمل ایک جملہ ملتا ہے یعنی شکل $\sum ع_1^{ف+ق} ع_2^{ق}$ ، $\sum ع_1^{ق+ر} ع_2^{ف}$ ، اور $\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} ع_3^{ر}$ کی رقمیں۔

پس

$$س_ر \sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} = \sum ع_1^{ف+ر} ع_2^{ق} + \sum ع_1^{ق+ر} ع_2^{ف} + \sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} ع_3^{ر} ،$$

جو ایسا ضابطہ ہے جو دوہرے اور تہرے متشاکل تفاعلوں کو ملاتا ہے۔
لیکن (۱) کی رو سے

$$\sum ع_1^{ف+ر} ع_2^{ق} = س_{ف+ر} س_ق - س_{ف+ق+ر} ،$$

$$\sum ع_1^{ق+ر} ع_2^{ف} = س_{ق+ر} س_ف - س_{ف+ق+ر} ،$$

$$\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} = س_ف س_ق - س_{ف+ق}$$

ان قیمتوں کو درج کرنے سے تہرا تفاعل $\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} ع_3^{ر}$ سلسلہ $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... کے واحد تفاعلوں کی رقوم میں مندرجۂ بالا طریقہ پر بیان ہو سکتا ہے۔

اسی طرح چوہرے تفاعل $\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} ع_3^{ر} ع_4^{س}$ کو تہرے تفاعل $\sum ع_1^{ف} ع_2^{ق} ع_3^{ر}$

(169)

پر منحصر کیا جا سکتا ہے اور بالآخر س، س۲، س۳ وغیرہ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔
یعنی آخر الامر اصلوں کا ہر منطق متشاکل تفاعل سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے
کیونکہ مسئلہ اسے س۱، س۲، س۳ وغیرہ سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں
جب قوت نماؤں میں سے چند قوت نما مساوی ہو جائیں تو ضابطوں
(۱) اور (۲) میں ترمیم کرنی ہوگی۔

مثلاً اگر ف = ق تو $\text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ق}} \equiv \text{عہ}_{۲}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۱}^{\text{ق}}$ اور (۱) کی رقمیں دو دو

کرکے مساوی ہوتی ہیں اس لئے $\sum \text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ق}} = ۲ \sum \text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ف}}$، جس سے

$$\sum \text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ف}} = \frac{۱}{۲}\left(\text{س}_{\text{ف}}^{۲} - \text{س}_{۲\text{ف}}\right)$$

اسی طرح اگر $\sum \text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ق}}\,\text{عہ}_{۳}^{\text{ر}}$ میں ف = ق = ر تو وہ چھ رقمیں مساوی

ہوتی ہیں جو $\text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ق}}\,\text{عہ}_{۳}^{\text{ر}}$ میں اصلوں کے تبادلہ سے حاصل ہوتی ہیں پس

$$\sum \text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۳}^{\text{ف}} = \frac{۱}{۳\times۲}\left(\text{س}_{\text{ف}}^{۳} - ۳\,\text{س}_{\text{ف}}\,\text{س}_{۲\text{ف}} + ۲\,\text{س}_{۳\text{ف}}\right)$$

عام صورت میں اگر ت قوت نما مساوی ہو جائیں تو ہر رقم ۱×۲×۳×...
×ت مرتبہ تکرار پاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$\sum \text{عہ}_{۱}^{\text{ف}}\,\text{عہ}_{۲}^{\text{ق}}\,\text{عہ}_{۳}^{\text{ر}}\,\text{عہ}_{۴}^{\text{ک}} = \text{س}_{\text{ف}}\,\text{س}_{\text{ق}}\,\text{س}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ک}} - \sum \text{س}_{\text{ف}}\,\text{س}_{\text{ق}}\,\text{س}_{\text{ر+ک}}$$

$$+ ۲\sum \text{س}_{\text{ف}}\,\text{س}_{\text{ق+ر+ک}} + \sum \text{س}_{\text{ف+ق}}\,\text{س}_{\text{ر+ک}} - ۶\,\text{س}_{\text{ف+ق+ر+ک}}$$

۲ — ثابت کرو

$$۲۴\sum عہ_1^م عہ_2^م عہ_3^م عہ_4^م = س_م^4 - ۶ س_م^2 س_{۲م} + ۸ س_م س_{۳م} + ۳ س_{۲م}^2 - ۶ س_{۴م}$$

۷۹ — مسئلہ ۳ — سروں $ب_1$، $ب_2$، $ب_3$ .... $ب_ن$ کی رقوم میں بیان کردہ $س_ر$ کی قیمت، $ما^ر$ کا سر ہے جو جملہ — ر لوک $ما^ن ف\left(\frac{1}{ما}\right)$ کو ما کی صعودی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ

$$لا^ن + ب_1 لا^{ن-1} + ب_2 لا^{ن-2} + \dots + ب_ن \equiv (لا - عہ_1)(لا - عہ_2)\dots(لا - عہ_ن)،$$

اس لئے اس میں لا کی بجائے $\frac{1}{ما}$ رکھنے سے

$$1 + ب_1 ما + ب_2 ما^2 + \dots + ب_ن ما^ن \equiv (1 - عہ_1 ما)(1 - عہ_2 ما)\dots(1 - عہ_ن ما)$$

(170)

اب طرفین کا نیپیری لوکارتم لینے سے

$$ب_1 ما + \left(ب_2 - \tfrac{1}{2} ب_1^2\right) ما^2 + \left(ب_3 - ب_1 ب_2 + \tfrac{1}{3} ب_1^3\right) ما^3 + \left(ب_4 - ب_1 ب_3 + \tfrac{1}{2} ب_2^2 + ب_1^2 ب_2 - \tfrac{1}{4} ب_1^4\right) ما^4 + \left(ب_5 - ب_2 ب_3 + ب_1 ب_2^2 + ب_1^2 ب_3 - ب_1 ب_4 - ب_1^3 ب_2 + \tfrac{1}{5} ب_1^5\right) ما^5 + \dots + ب_ر ما^ر + \dots،$$

$$\equiv -\text{ ما س}_1 - \frac{1}{2}\text{ ما}^2\text{ س}_2 - \frac{1}{3}\text{ ما}^3\text{ س}_3 - \ldots\ldots - \frac{1}{\text{ر}}\text{ ما}^\text{ر}\text{ س}_\text{ر} - \ldots$$

اسلئے دونوں جملوں میں ماؔ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{س}_\text{ر} = -\text{ر ب}_\text{ر}$$

جہاں $\text{ب}_\text{ر}$، ماؔ کا سر ہے لوک $\text{ما}^\text{ن}\text{ف}\left(\frac{1}{\text{ما}}\right)$ میں۔

اوپر کی تمام مساوات سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ $\text{س}_\text{ر}$ میں (ر دن) صرف سر ب_1، ب_2، ....، $\text{ب}_\text{ر}$ شامل ہوتے ہیں اور اس لئے $\text{س}_\text{ر}$ کے جملہ کی شکل پر اثر پڑے بغیر $\text{ب}_{\text{ر}+1}$، $\text{ب}_{\text{ر}+2}$، ....، $\text{ب}_\text{ن}$ کو معدوم کیا جا سکتا ہے۔

۸۰ ۔ اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں سروں کو بیان کرنا۔

چونکہ

$$1 + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ب}_2\text{ما}^2 + \ldots + \text{ب}_\text{ن}\text{ما}^\text{ن} \equiv (1 - \text{ع}_1\text{ما})(1 - \text{ع}_2\text{ما})\ldots(1 - \text{ع}_\text{ن}\text{ما})،$$

اسلئے

$$\text{لوک}\,(1 + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ب}_2\text{ما}^2 + \ldots \text{ب}_\text{ن}\text{ما}^\text{ن}) \equiv -\text{ ما س}_1 - \frac{1}{2}\text{ ما}^2\text{ س}_2 - \ldots - \frac{1}{\text{ر}}\text{ ما}^\text{ر}\text{ س}_\text{ر} \ldots (1)$$

اسلئے

$$1 + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ب}_2\text{ما}^2 + \ldots \text{ب}_\text{ن}\text{ما}^\text{ن} = \text{ق}^{-\text{ ما س}_1 - \frac{1}{2}\text{ ما}^2\text{ س}_2 - \frac{1}{3}\text{ ما}^3\text{ س}_3 - \ldots}$$

جو پھیلانے سے ہو جاتا ہے

$$1 - \text{س}_1\text{ما} - \left(\frac{1}{2}\text{س}_2 - \frac{1}{2\times1}\text{س}_1^2\right)\text{ما}^2 - \left(\frac{1}{3}\text{س}_3 - \frac{1}{2\times1}\text{س}_2\text{س}_1 + \frac{1}{3\times2\times1}\text{س}_1^3\right)\text{ما}^3 - \left(\frac{1}{4}\text{س}_4 - \frac{1}{3}\text{س}_3\text{س}_1 - \frac{1}{4}\text{س}_2^2\text{س}_1 ... \right)$$

$$\left(\frac{1}{4}\text{س}_4 - \frac{1}{3}\text{س}_3\text{س}_1 + \frac{1}{4}\text{س}_2\text{س}_1^2 - \frac{1}{4\times2}\text{س}_2^2 - \frac{1}{4\times3\times2}\text{س}_1^4\right)\text{ما}^4 - \ldots\ldots$$

اب ما کی مختلف قوتوں کا مقابلہ کرنے سے ب، $ب_۲$، $ب_۳$، .... $ب_ن$ کی قیمتیں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، .... $س_ن$ کی رقوم میں معلوم ہو جاتی ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ $ب_ر$ میں $س_ر$ کے بعد کی قوتوں کا کوئی مجموعہ شامل نہیں ہوتا۔

اگر متماثلہ (۱) کو ما کے لحاظ سے تفرق کیا جائے تو حاصل ہونیوالی متماثلہ مساوات سے دفعہ ۷۷ کی وہ مساواتیں اخذ کیجا سکتی ہیں جو سروں اور قوتوں کے مجموعوں کو مربوط کرتی ہیں۔

اس امر کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں یا کسی سر کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کرنیکا مسئلہ کامل طور پر معین ہے کیونکہ ہر صورت میں صرف ایک حل حاصل ہوتا ہے۔

آیندہ کسی باب میں سروں کی رقوم میں $س_م$ کے لئے اور اصلونکی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں $ب_م$ کے لئے عام جملے دئے جائیں گے جو ویرنگ (Waring) سے منسوب ہیں۔

مثالیں

ا۔ فہ (عہ$_۱$) + فہ (عہ$_۲$) + ... + فہ (عہ$_ن$)

کی قیمت معلوم کرو جہاں ف (لا) = ۰ کی اصلیں عہ$_۱$، عہ$_۲$، عہ$_۳$، ...... عہ$_ن$ ہیں اور فہ (لا)، لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے۔

ہمیں معلوم ہے

$$\frac{ف'(لا)}{ف(لا)} = \frac{۱}{لا - عہ_۱} + \frac{۱}{لا - عہ_۲} + \cdots\cdots + \frac{۱}{لا - عہ_ن}،$$

اور

$$\frac{ف'(لا)\,فہ(لا)}{ف(لا)} = \frac{فہ(لا)}{لا - عہ_۱} + \frac{فہ(لا)}{لا - عہ_۲} + \cdots\cdots + \frac{فہ(لا)}{لا - عہ_ن}$$

172)

تقسیم کی تکمیل کرنے سے اور اس مساوات کی طرفین میں صرف باقیوں کو برقرار رکھنے سے

$$\frac{ک_۰ لا^{ن-۱} + ک_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ک_{ن-۱}}{ف(لا)} = \frac{فہ(ع_۱)}{لا - ع_۱} + \frac{فہ(ع_۲)}{لا - ع_۲} + \cdots + \frac{فہ(ع_ن)}{لا - ع_ن}،$$

جس سے

$$ک_۰ لا^{ن-۱} + ک_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ک_{ن-۱} = \Sigma\, فہ(ع_۱)(لا-ع_۲)(لا-ع_۳)\cdots(لا-ع_ن)$$

اور اس مساوات کی طرفین میں $لا^{ن-۱}$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$ک_۰ = \Sigma\, فہ(ع_۱)،$$

۲۔ ثابت کرو کہ $س_ی$، اس خارج قسمت میں $\frac{۱}{لا^{ن-۱}}$ کا سر ہے جو $فَ(لا)$ کو $ف(لا)$ سے تقسیم کرنے سے اور لا کی منفی قوتوں کی بموجب ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ $س_{-ف}$، اسی خارج قسمت میں $لا^{ف-۱}$ کا سر (بہ تبدیل علامت) ہے جب اسکو لا کی مثبت قوتوں کی بموجب ترتیب دیا جاتا ہے۔

۴۔ اگر فہ(لا) کا درجہ ن - ۲ سے تجاوز نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sum_{ر=۱}^{ر=ن} \frac{فہ(ع_ر)}{فَ(ع_ر)} = ۰$$

جہاں $\sum_{ر=۱}^{ر=ن}$ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ر کو ۱ سے ن تک (بشمول ہر دو اعداد) تمام قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

جزوی کسور سے

$$\frac{فہ(لا)}{ف(لا)} = \frac{ا_۱}{لا - ع_۱} + \frac{ا_۲}{لا - ع_۲} + \cdots\cdots + \frac{ا_ن}{لا - ع_ن}،$$

اور ف (لا) سے ضرب جلیبائی دینے اور یکے بعد دیگرے لا = عہ، عہ، ... رکھنے سے

$$\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_1)}{\text{ف}'(\text{عہ}_1)}\cdot\frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_1} + \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_2)}{\text{ف}'(\text{عہ}_2)}\cdot\frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_2} + \dots + \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_\text{ن})}{\text{ف}'(\text{عہ}_\text{ن})}\cdot\frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_\text{ن}},$$

جس سے

$$\frac{\text{لا}\,\text{فہ}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_\text{ر})}{\text{ف}'(\text{عہ}_\text{ر})}\left(1 + \frac{\text{عہ}_\text{ر}}{\text{لا}} + \frac{\text{عہ}_\text{ر}^2}{\text{لا}^2} + \dots\dots\right)$$

جب فہ (لا) کا درجہ ن − ۲ ہو تو مساوات کی بائیں جانب کو $\frac{1}{\text{لا}}$ کے تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کوئی رقم ایسی نہیں ہے جس میں $\frac{1}{\text{لا}}$ جزو ضربی کے طور پر نہ آتا ہو۔ اس لئے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_\text{ر})}{\text{ف}'(\text{عہ}_\text{ر})} = 0$$

چونکہ فہ کوئی مطلق صحیح تفاعل ہو سکتا ہے جس کا درجہ ن − ۲ سے متجاوز نہ کرے اسلئے ہمیں ذیل کی مخصوص صورتیں ملتی ہیں جو خاص توجہ کے قابل ہیں:—

$$\sum \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-2}}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0،\quad \sum \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-3}}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0،\ \dots،\quad \sum \frac{\text{عہ}}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0،\quad \sum \frac{1}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0$$

۵ — اگر ن متغیروں لا_1، لا_2، ...، $\text{لا}_\text{ن}$ کے درمیان ذیل کی ن − ۲ مساواتیں

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{لا}_\text{ر} = 0،\quad \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{عہ}_\text{ر}\,\text{لا}_\text{ر} = 0،\ \dots\dots،\quad \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{عہ}_\text{ر}^{\text{ن}-3}\,\text{لا}_\text{ر} = 0$$

دی جائیں تو ان ن متغیروں کو دو نئے متغیروں ل_1، ل_2 کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب:— $\text{لا}_\text{ر} = \dfrac{\text{ل}_1 + \text{عہ}_\text{ر}\,\text{ل}_2}{\text{ف}'(\text{عہ}_\text{ر})}$

۸۱ — متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن۔ اصلوں کے متشاکل تفاعل کی کسی رقم میں سب اصلوں کی قوتوں کے مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا

وزن کہینگے (دیکھو دفعہ ۲۸) اور وہ بڑی سے بڑی قوت جسمیں ہر اصل تفاعل کے اندر داخل ہوتی ہے تفاعل کا رتبہ کہلائیگی۔ مثلاً Σ عہ $بہ^{۲}$ $جہ^{۳}$ کا وزن چھ اور اسکا رتبہ تین ہے۔ یہ ثابت کر دیا گیا ہے (دفعہ ۲۸) کہ اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کی قیمت میں (جو سروں کی رقوم میں بیان کی گئی ہو) ہر رقم کے لاحقوں کا مجموعہ تفاعل کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔ اب ہم متشاکل تفاعلوں سے متعلق دوسرا مسئلہ ثابت کرتے ہیں یعنے:۔

کسی متشاکل تفاعل کی قیمت سروں $ب_{۱}$، $ب_{۲}$ ..... $ب_{ن}$ کی رقوم میں معلوم کیجائے تو اس جملہ کا درجہ متشاکل تفاعل کے رتبہ کے مساوی ہوتا ہے

اس کو دفعہ ۲۳ کی مساواتوں سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جا سکتا ہے کیونکہ اصلوں کی رقوم میں ہر ایک سر کی قیمت میں کوئی اصل صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے اور اس لئے سروں میں بڑے سے بڑا درجہ وہی ہوگا جو کسی ایک اصل کے متناظر متشاکل تفاعل کا ہے۔ مثلاً Σ $عہ^{۲}$ $بہ^{۲}$ کی قیمت $ب_{۲}^{۲} - ۲ ب_{۱} ب_{۳} + ۲ ب_{۴}$ ہے۔ سروں کے اس تفاعل کا درجہ دو ہے اور یہ وہی ہے جو متشاکل تفاعل کا رتبہ ہے۔

چونکہ مندرجہ بالا مسئلہ اہم ہے اس لئے ہم اسکا ایک دوسرا ثبوت بھی دیتے ہیں جسمیں $ا_{۰}$ کی کسی مناسب قوت سے متشاکل تفاعل کو ضرب دینے سے اسکو سروں $ا_{۰}$، $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، ..... $ا_{ن}$ کے ایک متجانس صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے چنانچہ تفاعل آنیوالے اطلاقات میں عموماً اسی شکل میں نظر آئیگا۔

سروں

$ب_{۱}$، $ب_{۲}$، $ب_{۳}$، .....، $ب_{ن}$

کی جگہ $\frac{ا_{۱}}{ا_{۰}}$ ، $\frac{ا_{۲}}{ا_{۰}}$ ، $\frac{ا_{۳}}{ا_{۰}}$ ، ......، $\frac{ا_{ن}}{ا_{۰}}$ رکھو۔

اب اگر فہ (عہ۱، عہ۲، ....، عہن) سے اصلوں کا کوئی منطق صحیح متشاکل تفاعل تعبیر ہو تو

$ا_۰^ہ$ فہ (عہ۱، عہ۲، ....، عہن) = ف (ا۰، ا۱، ا۲، ...، ان)

جہاں تفاعل ف (ا۰، ا۱، ا۲، ....، ان) کا درجہ سروں میں ہ ہے اور یہ تفاعل سروں کا ایک متجانس صحیح تفاعل ہے جو ا۰ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہمیں ثابت یہ کرنا ہے کہ فہ کا درجہ ہ ہے۔ اس مقصد کے لئے اصلوں کو ان کے متکافیوں میں بدل دو اور اسلئے ا۰، ا۱، ا۲... ان کو ان، ان-۱، .... ا۰ میں۔

پس

$ان^ہ$ فہ $(\frac{۱}{عہ۱}، \frac{۱}{عہ۲}، ....، \frac{۱}{عہن})$ = ف (ان، ان-۱، ...، ا۰)....(۱)

نیز

$$فہ(\frac{۱}{عہ۱}، \frac{۱}{عہ۲}، ....، \frac{۱}{عہن}) = \frac{سا(عہ۱، عہ۲، عہ۳، ....، عہن)}{(عہ۱عہ۲عہ۳.... عہن)^پ}$$

جہاں فہ کا درجہ پ ہے اور سا ایک صحیح تفاعل ہے جو تمام اصلوں کے حاصل ضرب سے تقسیم نہیں ہوتا اور (عہ۱عہ۲.... عہن)^پ تمام رقموں کے نسب نماؤں کا کم سے کم مشترک جزو ضربی ہے۔ (۱) میں درج کرنے سے

$ا_۰^پ$ سا (عہ۱، عہ۲، ....، عہن) = ± $ان^{پ-ہ}$ ف (ان، ان-۱، ....، ا۰)

اس مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ، ہ کے مساوی ہے کیونکہ اگر پ، ہ سے بڑا ہوتا تو سا (عہ۱، عہ۲، ....، عہن) حاصل ضرب عہ۱عہ۲....عہن سے

تقسیم ہو جاتا اور اگر کم ہوتا تو سروں کا تفاعل ف $(ا'_ن، ا'_{ن-۱}، \ldots، ا'_۲)$ ا۱ سے تقسیم ہو جاتا اور یہ دونوں ہمارے مفروضہ کے خلاف ہیں۔

۸۲۔ اصلوں کے متشاکل تفاعل کو محسوب کرنا۔ کسی منطق متشاکل تفاعل کو دفعہ ۷۸ کے مسئلہ کی مدد سے محسوب کیا جا سکتا ہے اگرچہ عملاً دوسرے طریقے بالعموم زیادہ سہولت بخش ہوتے ہیں جیسا کہ اس دفعہ کے آخر میں جو مثالیں دی گئی ہیں ان سے واضح ہوگا۔ ہم جلد دوم میں جہاں اس مضمون پر مزید بحث کی جائے گی یہ بھی بتائینگے کہ متشاکل تفاعلوں کے محسوب کرنے میں اکثر اوقات ان طریقوں کو استعمال کرنے سے سہولت پیدا ہوتی ہے جو وہاں ثابت کئے ہوئے اصولوں پر مبنی ہیں۔

(175) اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل میں رقموں کی تعداد آسانی کے ساتھ معلوم کیجا سکتی ہے۔ مثلاً ن ویں درجہ کی مساوات کے جملہ $\sum عہ_۱^۳ عہ_۲^۲ عہ_۳$ میں رقموں کی تعداد ن (ن - ۱) (ن - ۲) ہے۔ یہ فی الحقیقت ن چیزوں کے ترتیبوں کی تعداد ہے جب انمیں سے تین تین کو اکٹھا لیا جائے۔ اگر کسی رقم میں اصلوں کے قوت نما سب کے سب مختلف نہ ہوں تو رقموں کی تعداد گھٹ جائیگی۔ مثلاً چار درجی کے لئے $\sum عہ^۲$ بہ جہ میں چوبیس کی بجائے صرف بارہ رقمیں شامل ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۶ صفحہ ۶۶)۔ اسکی وجہ یہ ہے کہ $\sum عہ^۲$ بہ جہ میں دو ترتیبوں عہ بہ جہ، عہ جہ بہ سے صرف ایک رقم ملتی ہے یعنی $عہ^۲$ بہ جہ۔ طالب علم اگر ترتیبوں کے نظریہ سے واقف ہے تو اسکو کسی مخصوص صورت میں اس قسم کی تخفیف کرنے میں کوئی مشکل پیش نہ آئیگی۔ جب اصلوں کے دو قوت نما مساوی ہوں تو اس تعداد کو ۱ × ۲ سے تقسیم کرنا ہوگا جو اس فرض کی بناء پر حاصل ہوتی ہے کہ تمام قوت نما مختلف ہیں۔ جب تین قوت نما مساوی ہوں تو اس تعداد کو ۱ × ۲ × ۳ سے تقسیم کرنا ہوگا اور علی ہذا القیاس۔ عام صورت میں ن ویں درجہ کی مساوات کے جملہ

$\sum \text{ع}_1^{\text{پ}}\,\text{ع}_2^{\text{ق}}\,\text{ع}_3^{\text{ر}} \ldots\ldots$ میں رقموں کی تعداد ہوگی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{م}+1)}{1\times 2\times 3\times \ldots\ldots \times \text{نہ}}$$

جہاں م سے ہر رقم میں اصلوں کی تعداد اور نہ سے مساوی قوت نماؤں کی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

جب اصلوں کے متشاکل تفاعل میں داخل ہونے والی بڑی سے بڑی قوت ایک چھوٹا عدد ہو یعنی جب تفاعل کا رتبہ چھوٹا ہو (دیکھو دفعہ ۸۱) تو متشاکل تفاعل کو محسوب کرنیکے لئے دفعہ ۲۷ میں بیان کردہ طریقے استعمال کرنا مفید ہوگا۔

یہ مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ جب کسی متشاکل تفاعل کو جس کا درجہ تمام اصلوں میں (یعنے اسکا وزن) ن ہو ن ویں درجہ کی مساوات کے لئے سروں ب_1، ب_2، ب_3، ..... ، $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی رقوم میں محسوب کیا جاتا ہے تو اسکی قیمت کسی اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کے لئے (جب عددی سر سب کے سب ایک کے مساوی ہوں) وہی ہوتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ $\text{ب}_{\text{ن}}$ کے بعد کا کوئی سر اس قیمت میں داخل نہیں ہو سکتا اور دفعہ ۷۷ کی مساواتیں جنکے ذریعہ ہم فرض کرتے ہیں کہ قیمت محسوب کیگئی ہے وہی شکل رکھتی ہیں خواہ مساوات ن ویں درجہ کی ہو یا اس سے بڑے درجہ کی۔ یہ بھی واضح ہے کہ اس متشاکل تفاعل کی قیمت، م درجہ کی مساوات کیلئے (جبکہ م < ن)، حاصل ہو سکتی ہے اگر ن ویں درجہ کی مساوات کے لئے اس متشاکل تفاعل کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اسمیں $\text{ب}_{\text{م}+1}$، $\text{ب}_{\text{م}+2}$، .... ، $\text{ب}_{\text{ن}}$ سب کو صفر کے مساوی رکھا جائے کیونکہ کمتر درجہ کی مساوات کو ن ویں درجہ کی مساوات سے اس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے کہ $\text{ب}_{\text{م}}$ کے بعد آنیوالے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھدیا جائے۔ اور اسی طرح

(176)

متناظر متشاکل تفاعل اصلوں α_{m+1}، α_{m+2}، ....، α_n میں سے ہر ایک کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3$ کو محسوب کرو۔
مساواتوں

$$\Sigma \alpha_1 = -b_1$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -b_3$$

کو باہم ضرب دو۔
حاصل ضرب میں رقم $\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3$ صرف ایک مرتبہ واقع ہوتی ہے اور رقم $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ چار مرتبہ کیونکہ α_1 کو $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ سے، α_2 کو $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4$ سے، α_3 کو $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4$ سے، اور α_4 کو $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ سے ضرب دینا ہوگا۔

پس $\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 4 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = b_1 b_3$

اس لئے $\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 = b_1 b_3 - 4 b_4$

(مثال ۶ دفعہ ۲۷ کے ساتھ مقابلہ کرو)

اگر دفعہ ۸۷ کے طریقہ سے حساب لگایا جاتا تو

$$\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{2} s_1 s_1^2 s_2 - s_1 s_1 s_3 - \frac{1}{2} s_2^2 + s_4$$

اور اس میں دفعہ ۷۷ کی قیمتیں درج کرنے سے وہی اوپر کا نتیجہ حاصل ہوتا۔

لیکن اس صورت میں ظاہر ہے کہ پہلا طریقہ بہت زیادہ آسان ہے کیونکہ س_2, س_3 وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی ایسی رقمیں داخل ہوتی ہیں جو ایک دوسرے کو زائل کرتی ہیں۔

۲۔ $\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2$ کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

یہاں $\Sigma\, \text{عہ}_1 \text{عہ}_2$ کا مربع لینے سے

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 + 2\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 + 6\Sigma\, \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4 = \text{ب}_2^2$$

مربع لینے میں یہ ظاہر ہے کہ رقم $\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3\text{عہ}_4$، $\text{عہ}_1\text{عہ}_2$ کو $\text{عہ}_3\text{عہ}_4$ سے یا $\text{عہ}_1\text{عہ}_3$ کو $\text{عہ}_2\text{عہ}_4$ سے یا $\text{عہ}_1\text{عہ}_4$ کو $\text{عہ}_2\text{عہ}_3$ سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی۔ پس نتیجہ میں $\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3\text{عہ}_4$ کا سر چھ ہوگا کیونکہ مربع میں ہر حاصل ضرب دو مرتبہ واقع ہوتا ہے۔ اس مثال اور مثال ۸ دفعہ ۲۷ میں صرف یہ فرق ہے کہ رقم $\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3\text{عہ}_4$ کے قبل Σ ہے۔ اس لئے بالآخر

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 = \text{ب}_2^2 - 2\,\text{ب}_1 \text{ب}_3 + 2\,\text{ب}_4$$

۳۔ $\Sigma\, \text{عہ}_1^3 \text{عہ}_2$ کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

مثال ۹ دفعہ ۲۷ کی طرح یہاں

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^2\, \Sigma\, \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 = \Sigma\, \text{عہ}_1^3 \text{عہ}_2 + \Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3{}'$$

اس لئے گذشتہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^3 \text{عہ}_2 = \text{ب}_1^2 \text{ب}_2 - 2\,\text{ب}_2^2 - \text{ب}_1 \text{ب}_3 + 4\,\text{ب}_4$$

۴۔ $\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 \text{عہ}_3$ کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

نتیجہ وہی ہوگا جو پانچویں درجہ کی مساوات کے لئے حساب لگانے میں ہوتا۔

اس متشاکل تفاعل کو حاصل کرنیکے لئے ہم $\sum \text{عہ}_1 \text{عہ}_2$ اور $\sum \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3$ کو باہم ضرب دیتے ہیں اور یہ دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنمیں پانچ اصلیں عہ_1، عہ_2، عہ_3، عہ_4، عہ_5 شامل ہوں۔ رقم $\text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 \text{عہ}_3$ صرف ایک مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ پیدا ہوسکتی ہے صرف $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2$ کو $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3$ سے ضرب دینے سے۔ نمونہ $\text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ کی رقمیں، انمیں سے ہر ایک، تین مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ رقم $\text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ پیدا ہوگی $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2$ کو $\text{عہ}_1 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ سے یا $\text{عہ}_1 \text{عہ}_3$ کو $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_4$ سے یا $\text{عہ}_1 \text{عہ}_4$ کو $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3$ سے ضرب دینے سے اور کسی اور طرح پیدا نہیں ہوسکتی۔ رقم $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4 \text{عہ}_5$ دس مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ اصلوں کے کسی زوج کو دوسری تین اصلوں سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی اور پانچ اصلوں میں سے دو دو کے اجتماعوں کی تعداد دس ہے۔ اسلئے عام مساوات کے لئے

$$\sum \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \sum \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 = \sum \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 \text{عہ}_3 + 3 \sum \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$$

$$+ 10 \sum \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4 \text{عہ}_5$$

[ن = ۵ کے لئے ہم اس مساوات کی تصدیق بالکل ایسے ہی کرسکتے ہیں جیسے مثال ۹ دفعہ ۲۷ میں۔ کیونکہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب میں جبکہ ہر جزو ضربی میں دس رقمیں ہوں ۱۰۰ رقمیں ہونگی یعنے $\text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 \text{عہ}_3$ کے نمونہ کی ۳۰ رقمیں $\text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ کے نمونہ کی ۲۰ رقمیں لیکن انمیں سے ہر ایک تین مرتبہ، اور رقم $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4 \text{عہ}_5$ ۱۰ مرتبہ۔]

اس طرح مطلوبہ متشاکل تفاعل کو محسوب کرنیمیں $\sum \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ کو

محسوب کرنا پڑیگا جس کے لئے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$\Sigma ع_1 \Sigma ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 = \Sigma ع_1^2 ع_2 ع_3 ع_4 + 5 \Sigma ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5$$

پس بالآخر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\Sigma ع_1^2 ع_2^2 ع_3 = - ب_2 ب_3 + 3 ب_1 ب_4 - 5 ب_5$$

دفعہ ۸۰ کے طریقہ میں $ر_1^4$ کو محسوب کرنا پڑیگا اور $س_1$، $س_2$ وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی رقمیں داخل ہونگی جو نتیجہ میں خارج ہونگی۔

۵ — $\Sigma ع_1^2 ع_2^2 ع_3 ع_4$ کی قیمت عام مساوات کے لئے معلوم کرو۔

ہم $\Sigma ع_1 ع_2$ کو $\Sigma ع_1 ع_2 ع_3 ع_4$ سے ضرب دیتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنمیں چھ اصلیں $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$، $ع_4$، $ع_5$، $ع_6$ شامل ہوں۔

رقم $ع_1^2 ع_2^2 ع_3 ع_4$ صرف ایک مرتبہ واقع ہوسکتی ہے نمونہ $ع_1^2 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5$ کی رقموں میں سے ہر ایک چار مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ رقم پیدا ہوتی ہے $ع_1 ع_2$ کو $ع_1 ع_3 ع_4 ع_5$ سے، یا $ع_1 ع_3$ کو $ع_1 ع_2 ع_4 ع_5$ سے، یا $ع_1 ع_4$ کو $ع_1 ع_2 ع_3 ع_5$ سے یا $ع_1 ع_5$ کو $ع_1 ع_2 ع_3 ع_4$ سے ضرب دینے سے۔ رقم $ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 ع_6$ پندرہ مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ چھ اصلوں میں سے دو دو کے اجتماعوں کی تعداد ۱۵ ہے (478)

پس

$$\Sigma ع_1 ع_2 \Sigma ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 = \Sigma ع_1^2 ع_2^2 ع_3 ع_4 + 4 \Sigma ع_1^2 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 + 15 \Sigma ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 ع_6$$

پھر $\Sigma ع_1^2 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5$ کو محسوب کرنے کے لئے

$$\sum ع_1 \sum ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 = \sum ع_1^2 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5$$
$$+ ۶ \sum ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 ع_6$$

پس بالآخر

$$\sum ع_1^2 ع_2^2 ع_3 ع_4 = ب_2 ب_4 - ۴ ب_1 ب_5 + ۹ ب_6$$

۶ — عام مساوات کے سروں کی رقوم میں $\sum ع_1^2 ع_2^2 ع_3^2$ کی قیمت معلوم کرو۔
$\sum ع_1 ع_2 ع_3$ کا مربع لینے سے

$$\sum ع_1 ع_2 ع_3 \sum ع_1 ع_2 ع_3 = \sum ع_1^2 ع_2^2 ع_3^2 + ۲ \sum ع_1^2 ع_2^2 ع_3 ع_4$$
$$+ ۶ \sum ع_1^2 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 + ۲۰ \sum ع_1 ع_2 ع_3 ع_4 ع_5 ع_6$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\sum ع_1^2 ع_2^2 ع_3^2 = ب_3^2 - ۲ ب_2 ب_4 + ۲ ب_1 ب_5 - ۲ ب_6$$

۸۳ — متجانس حاصل ضرب — عام طور پر ن مقداروں $ع_1$، $ع_2$، ... ، $ع_ن$ کے وہ متشاکل تفاعل جنکا وزن ایک ہی ہو متعدد ہوتے ہیں اور انہیں دو یا زیادہ وہ تفاعل بھی شریک کئے جا سکتے ہیں جن کا رتبہ اور وزن دونوں ایک ہی ہوں۔ مثلاً کسی ن حروف میں سے مندرجۂ ذیل متشاکل تفاعل بنائے جا سکتے ہیں جنکا وزن چار ہے :—

$$\sum ع_1^4 ،\ \sum ع_1^3 ع_2 ،\ \sum ع_1^2 ع_2 ع_3 ،\ \sum ع_1^2 ع_2^2 ،\ \sum ع_1 ع_2 ع_3 ع_4$$

وزن ر کے تمام ایسے متشاکل تفاعلوں کے مجموعہ کو ہم ن حروف کا "ر ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کا مجموعہ" کہینگے اور اس مجموعہ کو $\Pi_ر$ سے تعبیر کرینگے
یہ دیکھنا آسان ہے کہ $\Pi_ر$، ن اجزائے ضربی کے حسب ذیل حاصل ضرب میں

$\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر ہے :-

$$(۱+\text{عہ}_۱\,\text{لا}+\text{عہ}_۱^۲\,\text{لا}^۲+\ldots)(۱+\text{عہ}_۲\,\text{لا}+\text{عہ}_۲^۲\,\text{لا}^۲+\ldots)\ldots(۱+\text{عہ}_\text{ن}\,\text{لا}+\text{عہ}_\text{ن}^۲\,\text{لا}^۲+\ldots)$$

ذیل میں جو مثالیں دی گئی ہیں انہیں نہایت اہم بنیادی مسئلے شامل ہیں جو متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں اور اُس مساوات کے سروں میں تعلق ظاہر کرتے ہیں جس کی اصلیں $\text{عہ}_۱$، $\text{عہ}_۲$، $\text{عہ}_۳$، ....، $\text{عہ}_\text{ن}$ ہیں۔

مثالیں

۱ — ثابت کرو

$$\Pi_\text{ر} = \Sigma\, \frac{\text{عہ}^{\text{ن}+\text{ر}-۱}}{\text{ف}'(\text{عہ})}$$

چونکہ

$$\frac{\text{لا}^\text{ن}}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{۱}{(۱-\text{عہ}_۱\,\text{ما})(۱-\text{عہ}_۲\,\text{ما})\ldots(۱-\text{عہ}_\text{ن}\,\text{ما})}\text{، جہاں } \text{ما} = \frac{۱}{\text{لا}}$$

$$= (۱+\text{عہ}_۱\,\text{ما}+\text{عہ}_۱^۲\,\text{ما}^۲+\ldots)(۱+\text{عہ}_۲\,\text{ما}+\text{عہ}_۲^۲\,\text{ما}^۲+\ldots)\ldots(۱+\text{عہ}_\text{ن}\,\text{ما}+\text{عہ}_\text{ن}^۲\,\text{ما}^۲+\ldots)$$

$$= ۱ + \Pi_۱\,\text{ما} + \Pi_۲\,\text{ما}^۲ + \ldots\ldots + \Pi_\text{ر}\,\text{ما}^\text{ر} + \ldots\ldots \quad (۱)$$

اور

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{\text{ف}(\text{لا})} = \Sigma\, \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-۱}}{\text{ف}'(\text{عہ})} \times \frac{۱}{\text{لا}-\text{عہ}}$$

اسلئے

$$\frac{\text{لا}^\text{ن}}{\text{ف}(\text{لا})} = \Sigma\, \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-۱}}{\text{ف}'(\text{عہ})} \times \frac{۱}{۱-\text{عہ}\,\text{ما}} = \Sigma\, \frac{\text{عہ}^{\text{ن}+\text{ر}-۱}}{\text{ف}'(\text{عہ})}\,\text{ما}^\text{ر} \ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) میں $\text{ما}^\text{ر}$ کے سروں کا مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

۲ — اصلوں کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں کو مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کرو اور بالعکس —

چونکہ

$$(۱ - ع_۱ ما)(۱ - ع_۲ ما)\ldots(۱ - ع_ن ما) = ۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما^۲ + \ldots + ب_ن ما^ن$$

اسلئے مثال ماسبق سے

$$(۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما^۲ + \ldots + ب_ن ما^ن)(۱ + \Pi_۱ ما + \Pi_۲ ما^۲ + \ldots) \equiv ۱$$

جس سے

$$ب_۱ + \Pi_۱ = ۰،\ ب_۲ + \Pi_۲ + ب_۱ \Pi_۱ = ۰،\ ب_۳ + \Pi_۳ + ب_۱ \Pi_۲ + ب_۲ \Pi_۱ = ۰،$$

. . . .

اِن مساواتوں سے (جنمیں $ب_۱$، $ب_۲$، وغیرہ اور $\Pi_۱$، $\Pi_۲$، وغیرہ کا آپسمیں تبادلہ ہوسکتا ہے) $ب_۱$، $ب_۲$، $ب_۳$،\ldots $ب_ن$ کو $\Pi_۱$، $\Pi_۲$،\ldots $\Pi_ن$ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور بالعکس ۔

اس مثال اور مثال ماسبق کے ذریعہ حسب ذیل متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کیجاسکتی ہیں :-

$$\sum \frac{ع^{ن-۱}}{ف'(ع)}،\quad \sum \frac{ع^{ن}}{ف'(ع)}،\quad \sum \frac{ع^{ن+۱}}{ف'(ع)}،\ \text{وغیرہ}$$

۳ــ $\Pi_ر$ کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کے ذریعہ بیان کرو ۔

حاصل ضرب $(۱ - ع_۱ ما)(۱ - ع_۲ ما)\ldots(۱ - ع_ن ما)$ کو $\frac{۱}{ع}$ سے تعبیر کرنے سے اور تفرق کرنے سے

$$\frac{۱}{ع} \frac{فرع}{فرما} = \sum \frac{ع}{۱ - ع ما} = س_۱ + س_۲ ما + س_۳ ما^۲ + \ldots\ldots$$

نیز $ع = ۱ + \Pi_۱ ما + \Pi_۲ ما^۲ + \ldots\ \ldots\ldots$

اس لئے

$$(۱ + \Pi_۱ ما + \Pi_۲ ما^۲ + \ldots)(س_۱ + س_۲ ما + س_۳ ما^۲ + \ldots) \equiv \Pi_۱ + ۲\Pi_۲ ما + ۳\Pi_۳ ما^۲ + \ldots$$

. . . .

اب ما کی مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں مساواتوں کی ایک تعداد ملتی ہے جن کے ذریعہ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں Π_1، Π_2، Π_3...کو $س_1$، $س_2$، $س_3$، وغیرہ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۴ـــ متجانس حاصل ضربوں کے مجموں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے کے لئے ذیل کا ضابطہ ثابت کرو:۔

$$\frac{ف س_{ر+ع}}{ف ب_ر} = -(ر+ع)\,\Pi_ع$$

دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) کی طرفین کو تفرق کرو اور مثال ۲ کی مساوات سے Π_1، Π_2، Π_3 وغیرہ کو داخل کرو۔

(180)

نواں باب

مساواتوں کی اصلوں کی انتہائیں

۸۴ – انتہاوں کی تعریف – عددی مساواتوں کی حقیقی اصلوں کو دریافت کرنے کی کوشش میں سب سے پہلے اُن حدود کی قریب ترین قیمتیں معلوم کرنا مفید ہے جنکے اندر یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم یہاں وہ تحقیقات شروع کرتے ہیں جن کا حوالہ دفعہ ۴ کے آخر میں دیا گیا تھا اور چند مسئلے ثابت کرتے ہیں جنکا تعلق مساواتوں کی حقیقی اصلوں کی انتہاؤں سے ہے۔

مثبت اصلوں کی علوی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو ان اصلوں میں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور سفلی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو انمیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو منفی اصلوں کی علوی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انمیں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور انکی سفلی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انمیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو۔ یہاں سب سے بڑے منفی عدد سے مراد وہ عدد ہے جو $-\infty$ سے قریب ترین ہے۔

جب ہم وہ انتہائیں معلوم کرلیتے ہیں جنکے اندر مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں تو مساوات کو حل کرنے میں دوسرا کام یہ ہوگا کہ وہ وقفے دریافت کئے جائیں جنمیں مختلف اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس موخرالذکر مقصد کے لئے جو خاص طریقے رائج ہیں اُن کا ذکر آئندہ باب میں

کیا جائیگا ۔

ذیل کے تمام مسئلے مثبت اصلوں کی علوی انتہاؤں سے متعلق ہیں اور آگے چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ سفلی انتہاؤں اور منفی اصلوں کی تعیین آسانی کے ساتھ ان مسئلوں سے ہوسکتی ہے ۔

۸۵ ۔ مسئلہ ۱ ۔ کسی مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} = ۰$$

میں اگر پہلی منفی رقم $- ب_{ر} لا^{ن-ر}$ ہو اور اگر $ب_{ر}$ سے بڑا منفی سر $- ب_{س}$ ہو تو مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا $\sqrt[ر]{ب_{س}} + ۱$ ہوگی (181)

لا کی کوئی قیمت جو

$$لا^{ن} > ب_{س} \left(لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + \ldots\ldots + لا + ۱ \right) > ب_{س} \frac{لا^{ن-ر+۱} - ۱}{لا - ۱}$$

بناوے بدرجہ اولیٰ ف (لا) کو مثبت بنائیگی ۔

اب لا کو ایک سے بڑا لینے سے یہ نامساوات، ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے :-

$$لا^{ن} > ب_{س} \frac{لا^{ن-ر+۱}}{لا - ۱}$$

یعنے $$لا^{ن+۱} - لا^{ن} > ب_{س} لا^{ن-ر+۱}$$

یعنے $$لا^{ر-۱} (لا - ۱) > ب_{س}$$

اور پھر یہ نامساوات، ذیل کے رشتہ سے پوری ہوتی ہے :-

$$(\text{لا}-1)^{\text{ر}-1}(\text{لا}-1) = \text{یا} > \text{بس}$$

کیونکہ صریحاً $\text{لا}^{\text{ر}-1} > (\text{لا}-1)^{\text{ر}-1}$

اس لئے بالآخر

$$(\text{لا}-1)^{\text{ر}} = \text{یا} > \text{بس}$$

یعنے

$$\text{لا} = \text{یا} > 1 + \sqrt[\text{ر}]{\text{بس}}$$

۸۶ ۔ مسئلہ ۲ ۔ اگر کسی مساوات میں ہر منفی سر کو مثبت لیا جائے اور اس کو اس کے قبل کے تمام مثبت سروں کے مجموعہ سے تقسیم کیا جائے تو وہ بڑے سے بڑا خارج قسمت جو اسطرح حاصل ہو اسمیں ایک جمع کرنے کے بعد مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہوگا ۔

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} - \text{ا}_3\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots - \text{ا}_{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}} = 0$$

جس میں ہم وضاحت کی خاطر چوتھے سر کو منفی سمجھتے ہیں اور عام صورت میں ایک منفی سر $-\text{ا}_{\text{ر}}$ پر بھی غور کرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ اس مساوات کی ہر مثبت رقم کو ضابطہ

$$\text{ا}_{\text{م}}\text{لا}^{\text{م}} = \text{ا}_{\text{م}}(\text{لا}-1)(\text{لا}^{\text{م}-1} + \text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{لا} + 1) + \text{ا}_{\text{م}}$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے جہاں یہ ضابطہ

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}}-1}{\text{لا}-1} = \text{لا}^{\text{م}-1} + \text{لا}^{\text{م}-2} + \cdots + \text{لا} + 1$$

سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔ منفی ارقام غیر متبدل رہتی ہیں۔
تب ف (لا) کی رقموں کے جواب میں ذیل کے افقی خطوط ملتے ہیں جنکا مجموعہ کثیر الارقام ف (لا) ہے۔

$$ا_0(لا-1)لا^{ن-1} + ا_0(لا-1)لا^{ن-2} + ا_0(لا-1)لا^{ن-3} + \cdots + ا_0(لا-1)لا^{ن-ر} + \cdots + ا_0،$$

$$+ ا_1(لا-1)لا^{ن-2} + ا_1(لا-1)لا^{ن-3} + \cdots + ا_1(لا-1)لا^{ن-ر} + \cdots + ا_1،$$

$$+ ا_2(لا-1)لا^{ن-3} + \cdots + ا_2(لا-1)لا^{ن-ر} + \cdots + ا_2،$$

$$- ا_3 لا^{ن-3}،$$

$$\cdots\cdots + \cdots\cdots +$$

$$- ا_ر لا^{ن-ر}$$

$$\cdots\cdots +$$

$$+ ا_ن$$

اب ہم اس جملے کی انتصابی قطاروں کو کثیر الارقام کی متواتر رقمیں قرار دیتے ہیں۔ چنانچہ $لا^{ن-1}$، $لا^{ن-2}$، وغیرہ کے سر علی الترتیب یہ ہونگے

$$ا_0(لا-1)،\ (ا_0+ا_1)(لا-1)،\ (ا_0+ا_1+ا_2)(لا-1)-ا_3،\ \text{وغیرہ}$$

لا کی کوئی، ایک سے بڑی قیمت ہر اُس رقم کو مثبت بنا دیگی جسمیں منفی سر $ا_3$، $ا_ر$ وغیرہ واقع نہیں ہوتے۔ اُن رقموں کو مثبت بنانیکے لئے جنمیں منفی سر واقع ہوتے ہیں یہ ضروری ہے کہ

$$(ا_0+ا_1+ا_2)(لا-1) > ا_3،$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(لا-1)(ا_0+ا_1+ا_2+\cdots+ا_{ر-1}) > ا_ر،\ \text{وغیرہ}$$

پس

$$لا > ١ + \frac{ا_س}{ا_٠ + ا_١ + ا_٢} ، \dots ، لا' > ١ + \frac{ا_ر}{ا_٠ + ا_١ + ا_٢ + ا_٣ + \dots + ا_{ر-١}} \text{ وغیرہ}$$

اور ہر رقم کو مثبت بنانے کے لئے ہمیں بڑی سے بڑی وہ قیمت لینی چاہئے جو اس طور پر حاصل ہو۔ اس لئے لا کی ایسی قیمت مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہے۔

(183) ۸۷ — **عملی اطلاقات** — اصلوں کی قریبی انتہائیں عملی طور پر معلوم کرنے میں پچھلے دو دفعات کے مسئلوں سے سب سے زیادہ سہولت بخش عام طریقے ملتے ہیں۔ بعض اوقات ایک مسئلہ سے قریب تر انتہا ملیگی اور بعض اوقات دوسرے سے۔ اس لئے دونوں مسئلوں کو استعمال کر کے قریب تر انتہا معلوم کرنا بہتر ہوگا۔ مسئلہ ۱ عموماً زیادہ کارآمد اسوقت ہوگا جبکہ پہلے منفی سر کے قبل متعدد مثبت سر ہوں تاکہ ر کافی بڑا ہو۔ اور مسئلہ ۲ اسوقت جبکہ پہلے بڑے منفی سر کے قبل بڑے مثبت سر واقع ہوں۔ عام طور پر مسئلہ ۲ کو استعمال کرنے سے زیادہ تر قریبی انتہا معلوم ہوگی۔ ہم یہاں انتہا سے مراد وہ صحیح عدد لے رہے ہیں جو ان مسئلوں سے حاصل شدہ عدد کی قیمت کے عین بعد واقع ہوتا ہے۔

مثالیں

۱ — مساوات

$$لا^٤ - ٥ لا^٣ + ٤٠ لا^٢ - ٨ لا + ٢٣ = ٠$$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے انتہا ملیگی ۸ + ۱ یعنے ۹،

مسئلہ ۲ سے انتہا ملیگی $\frac{٥}{١}$ + ۱ یعنے ۶،

پس ایک علوی انتہا ۲ ہے ۔

۲ ۔ مساوات

$$لا^{۵} + ۳لا^{۴} + لا^{۳} - ۸لا^{۲} - ۵۱لا + ۱۸ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو ۔

مسئلہ ۱ سے حاصل ہوگا $\sqrt[۳]{۵۱} + ۱$ اور اسلئے ایک انتہا ۵ ہے ۔

مسئلہ ۲ سے حاصل ہوگا $\frac{۵۱}{۱+۳+۱} + ۱$ اور اس لئے ایک انتہا ۱۲ ہے

اس صورت میں مسئلہ ۱ سے قریب تر انتہا ملتی ہے ۔

۳ ۔ $لا^{۷} + ۴لا^{۶} - ۳لا^{۵} + ۵لا^{۴} - ۹لا^{۳} - ۱۱لا^{۲} + ۶لا - ۸ = ۰$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو ۔

کسروں

$$\frac{۳}{۱+۴}، \quad \frac{۹}{۱+۴+۵}، \quad \frac{۱۱}{۱+۴+۵}، \quad \frac{۸}{۱+۴+۵+۶}$$

میں سے تیسری کسر سب سے بڑی ہے اور مسئلہ ۲ سے انتہا ہوگی ۳ ۔ مسئلہ ۱ سے انتہا ملیگی ۵ ۔

۴ ۔ $لا^{۸} + ۲۰لا^{۷} + ۴لا^{۶} - ۱۱لا^{۵} - ۱۲۰لا^{۴} + ۱۳لا - ۲۵ = ۰$

کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو ۔

جواب :۔ دونوں طریقوں سے انتہا ملیگی ۶ ۔

۵ ۔ $۴لا^{۵} - ۸لا^{۴} + ۲۲لا^{۳} + ۹۸لا^{۲} - ۷۳لا + ۵ = ۰$

کی مثبت اصلوں کی انتہا معلوم کرو ۔

جواب :۔ مسئلہ ۱ سے ۲۰، مسئلہ ۲ سے ۳ ۔

عموماً صرف معائنہ سے ایسی انتہا کا معلوم کرنا ممکن ہے جو متذکرہ صدر مسئلوں سے حاصل شدہ انتہاؤں سے قریب تر ہو ۔ یہ طریقہ اس بات پر مشتمل

(184

ہوتا ہے کہ ہم مجوزہ مساوات کی رقموں کو گروہوں میں ترتیب دیں اس طور پر کہ ہر گروہ میں ایک مثبت رقم پہلے رکھی جائے اور پھر یہ دیکھیں کہ وہ کم سے کم صحیح عدد کونسا ہے جس کو لا کی بجائے رکھنے سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ کسی خاص صورت میں خود مساوات کی شکل سے ظاہر ہوگا کہ ترتیب کی صورت کیا ہونی چاہئے۔

۶۔ مثال ۲ کی مساوات کو یوں ترتیب دیا جا سکتا ہے:۔

لا^۲ (لا^۳ − ۸) + لا (۳ لا^۳ − ۵۱) + لا^۳ + ۱۸ = ۰

لا = ۳ یا اس سے کوئی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ پس ایک علوی انتہا ۳ ہے۔

۷۔ مثال ۴ کی مساوات کی ترتیب یہ ہو سکتی ہے:۔

لا^۵ (لا^۳ − ۱۱) + ۲۰ لا^۴ (لا^۳ − ۶) + ۴ لا^۶ + ۱۳ اا − ۲۵ = ۰

لا = ۳ یا اس سے کسی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ اسلئے ایک انتہا ۳ ہے۔

۸۔ مساوات

لا^۴ − ۴ لا^۳ + ۳۳ لا^۲ − ۲ لا + ۱۸ = ۰

کی اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

اس کو شکل

لا^۲ (لا^۲ − ۴ لا + ۵) + ۲۸ لا (لا − ۱/۱۴) + ۱۸ = ۰

میں رکھا جا سکتا ہے۔ اب چونکہ سہ رقمی لا^۲ − ۴ لا + ۸ کی اصلیں خیالی ہیں یہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۱۲)۔ پس لا = ۱ اعلوی انتہا ہے۔

دو درجی کو اس طور پر کسی گروہ میں داخل کرنے سے اکثر صورتوں میں فائدہ ہوگا بشرطیکہ اسکی اصلیں خیالی یا مساوی ہوں۔

۹۔ مساوات ۵ لا^۵ − ۷ لا^۴ − ۱۰ لا^۳ − ۲۳ لا^۲ − ۹۰ لا − ۳۱۷ = ۰

کی اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو ۔

اس قسم کی مثالوں میں سہولت اسمیں ہوگی کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کردیا جائے ۔ چنانچہ اوپر کی مساوات کو اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے :۔

$$\text{لا}^{۴}(\text{لا}-۷)+\text{لا}^{۳}(\text{لا}^{۲}-۱۰)+\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۳}-۲۳)+\text{لا}(\text{لا}^{۴}-۹۰)+\text{لا}^{۵}-۷۱۳=۰$$

ظاہر ہے کہ اصلوں کی ایک علوی انتہا ۷ ہے ۔ یہاں عام طریقوں سے زیادہ دور کی انتہا ملتی ہے ۔

۱۰ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{۴}-\text{لا}^{۳}-۲\,\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}-۲۴=۰$$

کی اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو ۔

جب منفی رقمیں متعدد ہوں اور بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو تو سہولت اسمیں ہے کہ پوری مساوات کو ایسے عدد سے ضرب دیا جائے کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کیا جاسکے ۔ یہاں ۴ سے ضرب دیکر مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا}^{۳}(\text{لا}-۴)+\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲}-۸)+\text{لا}(\text{لا}^{۳}-۱۶)+\text{لا}^{۴}-۹۶=۰$$

علوی انتہا ۴ ہے ۔ عام طریقوں سے ۲۵ حاصل ہوگی ۔

۸۸ ـــ مسئلہ ۳ ـــ کوئی عدد جو کثیر الارقام ف (لا) اور اسکے تمام مشتق تفاعلوں $ف_{۱}$ (لا)، $ف_{۲}$ (لا)، ... $ف_{ن}$ (لا) کو مثبت بنادے مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہوگا ۔ (185

انتہاؤں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ نیوٹن سے منسوب ہے ۔ اسکو استعمال کرنے میں قبل الذکر طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ محنت اٹھانی پڑے گی لیکن اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس سے ہمیشہ بہت قریب کی انتہائیں

ملینگی اور ایسی مساوات کی صورت میں جسکی سب اصلیں حقیقی ہوں اس طریقہ سے حاصل کی ہوئی انتہا جیسا کہ آگے چلکر ثابت کیا جائیگا بڑی سے بڑی اصل کے عین بعد کا صحیح عدد ہوگی ۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں کو بقدر ہ کے گھٹایا گیا ہے تو لا - ہ = ما

$$ف(ما + ہ) = ف(ہ) + ف_۱(ہ)\, ما + \frac{ف_۲(ہ)}{۱ \times ۲} ما^۲ + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots \frac{ف_ن(ہ)}{۱ \times ۲ \times \ldots \times ن} ما^ن$$

اب اگر ہ ایسا ہو کہ وہ تمام سرون

$ف(ہ)،\ ف_۱(ہ)،\ ف_۲(ہ)،\ \ldots،\ ف_ن(ہ)$

کو مثبت بنادے تو ما کی مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہوسکتی جس کے یہ معنی ہیں کہ لا کی مساوات کی کوئی اصل ہ سے بڑی نہیں ہوسکتی ۔ پس مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہ ہے ۔

مثال

$$ف(لا) = لا^۴ - ۲ لا^۳ - ۳ لا^۲ - ۵ ۱ لا - ۳$$

کسی مثال میں انتہاوں کو معلوم کرنے کے لئے نیوٹن کا طریقہ استعمال کرنا ہو تو عام طریقہ عمل حسب ذیل ہوگا :- وہ چھوٹے سے چھوٹا صحیح عدد لو جو $ف_{ن-۱}(لا)$ کو مثبت بنادے اور ترتیب وار $ف_۱(لا)$ تک اوپر جاتے ہوئے دوسرے تفاعلوں میں لا کی بجائے اس عدد کو درج کرنیکا اثر دریافت کرو ۔ جب ایسے تفاعل پر پہنچو جو زیر بحث عدد سے منفی ہوجاتا ہے تو اسکو بقدر ایک کے متواتر بڑہاتے جاؤ یہانتک کہ اس کے درج کرنے سے تفاعل مثبت ہوجائے

اور پھر اس نئے عدد کے ساتھ وہی عمل کرو جو اوپر مذکور ہوا اور اسکو بڑھاتے جاؤ اگر سلسلہ کا کوئی دوسرا تفاعل منفی ہو جائے۔ علیٰ ہذا یہاں تک کہ ایسا عدد ملجائے جو سلسلہ کے تمام تفاعلوں کو مثبت بنادے۔ مثال بالا میں تفاعلوں کا سلسلہ یہ ہوگا:—

$$ف\,(لا) = لا^{۴} - ۲\,لا^{۳} - ۳\,لا^{۲} - ۱۵\,لا - ۳\,،$$

$$ف_{۱}\,(لا) = ۴\,لا^{۳} - ۶\,لا^{۲} - ۶\,لا - ۱۵\,،$$

$$\frac{۱}{۲}\,ف_{۲}\,(لا) = ۶\,لا^{۲} - ۶\,لا - ۳\,،$$

$$\frac{۱}{۶}\,ف_{۳}\,(لا) = ۴\,لا - ۲\,،$$

$$\frac{۱}{۲۴}\,ف_{۴}\,(لا) = ۱\,،$$

(186) یہاں لا = ۱ سے ف۳ (لا) مثبت بنجاتا ہے۔ ف۲ (لا) میں لا = ۱ درج کرنے سے ف۲ (لا) منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۲ سے ف۲ (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف۱ (لا) میں لا = ۲ درج کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۳ سے ف۱ (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۳ درج کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ پھر لا کو بقدر ایک کے بڑھانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۴ سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ پس مطلوبہ علوی انتہا ۴ ہے۔

نیوٹن کے قاعدے کو اس طریقہ سے استعمال کرنے میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ جب کوئی عدد ایک خاص حد تک کے تمام مشتق تفاعلوں کو مثبت بناتا ہے تو اس سے بڑا کوئی عدد بھی ان سب کو مثبت بناتا ہے اور اس طرح سلسلہ کے نچلے تفاعلوں پر اس عدد کے اثر کو مشاہدہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ امر مساوات

$$ف\,(ل+ه) = ف\,(ل) + فَ\,(ل)\,ه + فً\,(ل)\,\frac{ه^{۲}}{۱\times۲} + \ldots\ldots$$

سے ظاہر ہے (سلسلہ کے کسی تفاعل کو فہ (لا) سے تعبیر کرو اور مشتق تفاعلوں کے لئے عام ترقیم استعمال کرو) جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر فہ (ا)، فہَ (ا)، فہً (ا)، ..... سب کے سب مثبت ہوں اور ہ بھی مثبت ہو تو فہ (ا + ہ) کو مثبت ہونا چاہئے۔

یہ امر غور طلب ہے کہ نیوٹن کے طریقہ میں ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اکثر دو متصل صحیح عددوں کا علم حاصل ہوتا ہے جن کے درمیان بڑی سے بڑی اصل واقع ہوتی ہے۔ مثلاً مثال بالا میں چونکہ لا = ۳ کے لئے ف (لا) منفی اور لا = ۴ کے لئے مثبت ہے اسلئے اس مساوات کی بڑی سے بڑی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۸۹ ۔ سفلی انتہائیں اور منفی اصلوں کی انتہائیں۔ مثبت اصلوں کی سفلی انتہا معلوم کرنا ہو تو مساوات کو اول لا = $\frac{۱}{ما}$ کے ابدال سے تحویل کرنا چاہئے۔ پھر ما میں جو مساوات حاصل ہوگی اس کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا ہ معلوم کرو۔ اسکا متکافی یعنی $\frac{۱}{ہ}$ مطلوبہ سفلی انتہا ہوگی کیونکہ

$$ما < ہ، \quad \frac{۱}{ما} > \frac{۱}{ہ}، \quad \text{یعنی } لا > \frac{۱}{ہ}،$$

منفی اصلوں کی انتہائیں معلوم کرنے کے لئے مجوزہ مساوات کو صرف لا = - ما کے ابدال سے تحویل کرنا ہوگا۔ یہ استحالہ منفی اصلوں کو مثبت اصلوں میں بدلدیگا۔ فرض کرو کہ ما میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصلوں کی علوی اور سفلی انتہائیں ہ اور ہَ ہیں تو مجوزہ مساوات کی منفی اصلوں کی انتہائیں - ہ اور - ہَ ہونگی۔

(187) **۹۰ ۔ انتہائی مساواتیں ۔** اگر مساوات فَ (لا) = ۰ کی تمام حقیقی اصلیں معلوم ہوسکیں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلونکی

تعداد معلوم کرنا ممکن ہے۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ ف َ (لا) = ۰ کی حقیقی اصلیں مقدار کے لحاظ سے صعودی ترتیب میں عَ، بَ، جَ،.... لَ ہیں اور فرض کرو کہ قیمتوں کا حسب ذیل سلسلہ لا کی بجائے ف (لا) میں درج کیا گیا ہے۔

$-\infty$، عَ، بَ، جَ،........، لَ، $+\infty$

جب اِن مقداروں میں سے کسی دو متصلہ مقداروں سے مختلف العلامت نتیجے حاصل ہوں تو اِن کے درمیان ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ہوگی اور نتیجہ صریح دفعہ ۱۷ کی رو سے صرف ایک اصل ہوگی۔ لیکن جب نتیجے ہم علامت ہوں تو اسی نتیجہ صریح کی رو سے اِنکے درمیان کوئی اصل موجود نہیں ہوگی۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مذکورۂ بالا مقداروں کو درج کرنے سے نتیجوں میں ہر علامت کی تبدیلی مجوزہ مساوات کی ایک حقیقی اصل کو مستلزم ہے۔

اگر ف (لا) = ۰ کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۱۷ کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ فَ (لا) = ۰ کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور یہ کہ وہ ایک ایک کر کے فَ (لا) = ۰ کی اصلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اُسی صورت میں اور اسی مسئلہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فً (لا) = ۰ اور باقی سب مشتق تفاعلوں کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور اِن میں سے کسی تفاعل کی اصلیں اُس تفاعل کی اصلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیان واقع ہوتی ہیں جسکا یہ مشتق ہے۔

اس قسم کی مساواتوں کو جو کسی مجوزہ مساوات کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹی ہوئی ہوں اور جنکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیان واقع ہوں ہم انتہائی مساواتیں کہینگے۔

یہ ظاہر ہے کہ نیوٹن کے طریقہ سے اصلوں کی انتہائیں معلوم کرنیمیں جب ف (لا) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۸۸ میں تبلائے ہوئے

طریقہ کی بموجب عمل کرنے سے تفاعل ف (لا) خود آخری تفاعل ہوگا جسکو مثبت بنانا ہوگا اور اس لئے جس علوی انتہا پر ہم پہنچتے ہیں وہ بڑی سے بڑی اصل کے عین بعد کا صحیح عدد ہوگا۔

مثالیں

(188) ا۔ ثابت کرو کہ ف (لا) = ۰ کے کسی مشتق تفاعل فم (لا) = ۰ کی خیالی اصلیں ف (لا) کی خیالی اصلوں سے زیادہ نہیں ہو سکتیں لیکن اسکی حقیقی اصلیں زیادہ ہو سکتی ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مشتق تفاعل میں خیالی اصلوں کا موجود ہونا معلوم ہو تو خیالی اصلوں کی کم از کم اتنی ہی تعداد ابتدائی مساوات میں داخل ہونی چاہئے۔

۲۔ دفعہ ۹۰ کا طریقہ استعمال کر کے وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$لا^۳ - ق\ لا + ر = ۰$$

کی تمام اصلیں حقیقی ہوں۔

۳۔ اسی طریقہ سے مساوات

$$لا^ن - ن\ ق\ لا + (ن - ۱)\ ر = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

جواب:- جب ن جفت ہو تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا کوئی بھی نہیں بموجب اسکے کہ

$$ق^ن > یا < ر^{ن-۱}$$

جب ن طاق ہو تو تین حقیقی اصلیں ہیں یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$ق^ن > یا < ر^{ن-۱}$$

۴۔ مساوات $لا^ن (لا - ۱)^ن = ۰$ کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ن واں مشتق

تفاعل معلوم کرکے ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہیں :-

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}}{\text{۲ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\text{۲ن}(\text{۲ن}-۱)}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} - \text{وغیرہ} = ۰$$

۵- اسی طرح $(\text{لا}^۲-۱)^{\text{ن}}$ کا ن واں مشتق معلوم کرکے ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور ۱- اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں :-

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\text{۲ن}(\text{۲ن}-۱)}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{\text{۲ن}(\text{۲ن}-۱)(\text{۲ن}-۲)(\text{۲ن}-۳)}\,\text{لا}^{\text{ن}-۴} - \ldots = ۰$$

۶- اگر مساوات ذیل میں مقادیر ل، م، ن میں سے کسی دو کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دو درجی جس میں یہ مساوات تحویل ہو جاتی ہے ایک انتہائی مساوات ہے اور ثابت کرو کہ مجوزہ مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہیں :-

$$(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج}) - \text{ل}^۲(\text{لا}-\text{ا}) - \text{م}^۲(\text{لا}-\text{ب}) - \text{ن}^۲(\text{لا}-\text{ج}) - ۲\,\text{ل}\,\text{م}\,\text{ن} = ۰$$

۷- مساوات

$$\text{لا}^۴ + ۴\,\text{لا}^۳ - ۲\,\text{لا}^۲ - ۱۲\,\text{لا} + \text{پ} = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت پر پ کی مختلف قیمتوں کے لئے بحث کرو -

دفعہ ۹۰ استعمال کرو۔ جب پ، ۷- سے کم ہو تو دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی - جب پ، ۷- اور ۹ کے درمیان واقع ہو تو تمام اصلیں حقیقی ہیں جب پ، ۹ سے بڑا ہو تو تمام اصلیں خیالی ہیں - مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی جبکہ پ = ۷- اور مساوی اصلوں کے دو زوج ہونگے جبکہ پ = ۹-

(189)

دسواں باب

مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنا

۹۱ — گزشتہ باب کے طریقوں سے ہم وہ حدود معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان کسی عددی مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ کسی خاص اصل کو عملاً تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر یہ اصل جس وقفہ میں واقع ہوتی ہے اس کو ایسے وقفوں سے علحدہ کر لینا ضروری ہے جنمیں باقی دوسری اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس باب میں چند مسئلے بیان کئے جائینگے جنکا مقصد متغیر کی کسی دو اختیاری طور پر مفروضہ قیمتوں کے درمیان مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد متعین کرنا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ مقصد پورا ہو جائے تو نہ صرف حقیقی اصلوں کی کل تعداد معلوم کرنا ممکن ہو جائیگا بلکہ ہم وہ حدود بھی معلوم کر سکینگے جن کے درمیان اصلیں فرداً فرداً واقع ہوتی ہیں اس مقصد کو پیش نظر رکھکر فوریر (Fourier) اور بوڈان (Budan) نے جو مسئلے بیان کئے ہیں وہ اگرچیکہ طرز بیان کا لحاظ کرتے مختلف ہیں لیکن اصول میں مماثل ہیں۔ اس اصول کو سمجھانیکے لئے فوریر کا بیان زیادہ سہولت بخش ہے لیکن عملی طور پر استعمال کرنے میں بوڈن کے بیان کو ترجیح حاصل ہے۔ سٹرم (Sturm) کا مسئلہ اگرچیکہ عملاً زیادہ محنت طلب ہے لیکن قبل الذکر پر اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس کو استعمال کرنے سے کسی دو مجوزہ مقداروں کے درمیان حقیقی اصلوں کی بالکل ٹھیک تعداد ہمیشہ معلوم ہو جاتی ہے حالانکہ فوریر اور

بوڈان کے مسئلہ سے صرف ایک خاص حد حاصل ہوتی ہے جسکے آگے حقیقی اصلوں کی تعداد مجوزہ وقفہ کے اندر متجاوز نہیں کر سکتی ۔

۹۲ ۔ فوریہ اور بوڈان کا مسئلہ ۔ فرض کرو کہ دو عدد ا اور ب (ا < ب) لا کی بجائے اس سلسلہ میں درج کئے گئے ہیں جو ف (لا) اور اس کے مشتق تفاعلوں سے بنتا ہے یعنی سلسلہ ذیل میں

ف (لا)، ف١ (لا)، ف٢ (لا) ..... فن (لا)

تو حقیقی اصلوں کی تعداد جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہیں اس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو سلسلۂ بالا میں علامتوں کی تبدیلیوں کی اس تعداد کو جو لا کی بجائے ا درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں تبدیلیوں کی اس تعداد پر ہے جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں ۔ اور جب اس وقفہ میں حقیقی اصلوں کی تعداد اس اضافہ سے کم پڑتی ہو تو یہ کمی بقدر ایک جفت عدد کے ہوگی ۔ (۱۹۵)

یہ وہ شکل ہے جسمیں فوریہ اس مسئلہ کو بیان کرتا ہے ۔

یہاں یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ جب ہم دو عددوں ا اور ب کا ذکر کرتے ہیں جن میں سے ا چھوٹا ہے تو انہیں سے ایک یا دونوں منفی ہو سکتے ہیں اور مطلب یہ ہوتا ہے کہ ا بہ نسبت ب کے -∞ سے زیادہ قریب ہے ۔

اب ہم ان تبدیلیوں کی جانچ کرتے ہیں جو سلسلہ بالا کے تفاعلوں کی علامتوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتی ہیں جب لا کی

قیمت کو ا سے ب تک مسلسل طور پر بڑھتا ہوا فرض کیا جائے۔ حسب ذیل چار مختلف صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:۔

(۱) لا کی قیمت مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک واحد اصل میں سے گذر سکتی ہے۔

(۲) وہ ف (لا) = ۰ میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی اصل میں سے گذر سکتی ہے۔

(۳) وہ امدادی تفاعلوں $ف_م$ (لا) = ۰ میں سے کسی ایک کی اصل میں سے گذر سکتی ہے اور یہ اصل $ف_م$ (لا) = ۰ یا $ف_{م+۱}$ (لا) = ۰ میں سے کسی میں واقع نہیں ہوتی۔

(۴) وہ $ف_م$ (لا) = ۰ میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی اصل میں سے گذر سکتی ہے اور $ف_{م-۱}$ (لا) = ۰ میں واقع نہیں ہوتی۔

ذیل میں ہم سہولت کے مدنظر ف (لا) کی بجائے صرف ف سے کام لینگے۔

(۱) پہلی صورت میں دفعہ ۵ ۷ کی رو سے یہ ظاہر ہے کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرنے میں علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ اصل میں سے گذرنیکے عین قبل ف اور $ف_۱$ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں اور گذرنیکے عین بعد موافق۔

(۲) دوسری صورت میں ف (لا) = ۰ کی ر ضعفی اصل میں سے گذرنے میں یہ ظاہر ہے کہ علامت کی ر تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں کیونکہ دفعہ ۶ ۷ کی رو سے گذرنیکے عین قبل تفاعلوں

$$ف، ف_۱، ف_۲، \ldots، ف_{ر-۱}، ف_ر$$

کی علامتیں باری باری سے + اور − یا − اور + ہوتی ہیں

اور گذرنیکے عین بعد سب کی علامتیں وہی ہوتی ہیں جو $ف_ر$ کی ہے۔

(191) (۳) تیسری صورت میں $ف_م$ (لا) = ۰ کی اصل کو $ف_{م-۱}$ اور $ف_{م+۱}$ میں درج کرنے سے انکی علامتیں یا تو موافق ہونگی یا مختلف۔ فرض کرو کہ دونوں ہم علامت ہیں تو اصل میں سے گذرنے میں علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں کیونکہ گذرنے سے قبل $ف_م$ کی علامت ان دونوں موافق علامتوں سے مختلف ہوگی اور گذرنیکے بعد علامت وہی ہوگی (دفعہ ۶۷)۔ فرض کرو کہ دونوں مختلف العلامت ہیں تو علامت کی کوئی تبدیلی کم نہ ہوگی کیونکہ اصل میں سے گذرنے سے قبل $ف_{م-۱}$، $ف_م$، $ف_{م+۱}$ کی علامتیں ہونی چاہئیں + + - یا - - + اور گذرنیکے بعد یہ علامتیں ہو جاتی ہیں + - - یا - + +، اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ $ف_م$ (لا) = ۰ کی اصل میں سے گذرنے میں علامت کے کسی تغیر کا اضافہ نہیں ہو سکتا بلکہ دو تغیرات کم ہو سکتے ہیں۔

(۴) چوتھی صورت میں لا ایسی قیمت میں سے گذرتا ہے (فرض کرو یہ قیمت ع ہے) جو نہ صرف $ف_م$ کو بلکہ $ف_{م+۱}$، $ف_{م+۲}$، ...، $ف_{م+ر-۱}$ کو بھی معدوم کر دیتی ہے۔ دفعہ ۶۷ کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ اصل میں سے گذرتے وقت علامت کی تعداد تبدیلیاں ہمیشہ کم ہونگی۔ انکی مجموعی تعداد تفاعلوں کے سلسلہ

$$ف_{م-۱}،\ ف_م،\ ف_{م+۱}،\ \ldots،\ ف_{م+ر-۱}،\ ف_{م+ر}$$

پر غور کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

حسب ذیل نتیجے بہت آسانی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں:-

(ا) جب $ف_{م-۱}$ (ع) اور $ف_{م+ر}$ (ع) ہم علامت ہوں تو

ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،

ر + ۱ تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو ۔

(ب) جب کہ ف م-۱ (ع) اور ف م (ع) مختلف العلامت ہوں تو

ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،

ر - ۱ تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو ۔

اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ ف م (لا) کی ر ضعفی اصل میں سے گذرتے وقت تبدیلیوں کی جفت تعداد کم ہوجاتی ہے ۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ (۱)، (۲) کی ایک خاص صورت ہے اور (۳)، (۴) کی ایک خاص صورت یعنے جبکہ ر = ۱ ۔ لیکن چونکہ صورتیں (۱) اور (۳) اکثر وقوع پذیر ہوتی ہیں، اس لئے ان کو علیحدہ جماعت میں رکھنا ہی بہتر ہے ۔

ثبوت بالا پر نظر ثانی کرنے سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے تو علامت کی کسی تبدیلی کا اضافہ نہیں ہوسکتا اور یہ کہ ف (لا) = ۰ کی ہر واحد اصل میں سے گذرتے وقت (192) علامت کی ایک تبدیلی کم ہوتی ہے اور نیز یہ کہ کسی حال میں بھی علامت کی تبدیلیوں کی طاق تعداد کم نہیں ہوسکتی سوائے اس صورت کے جبکہ لا، ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرے ۔ پس ا سے ب تک لا کے کل تغیر میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جو کم ہوتی ہے وہ یا تو اس وقفہ میں ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی ہونی چاہئے یا اس سے بقدر ایک جفت عدد کے متجاوز ہونی چاہئے۔ اس لئے مسئلہ بالا ثابت ہوگیا ۔

۹۳ — مسئلہ کا استعمال ۔ اس مسئلہ کو بوڈان نے جس شکل میں بیان کیا ہے وہ جیسا کہ اوپر مذکور ہوا عملی مقاصد کے لئے زیادہ سہولت بخش ہے۔

چنانچہ بوڈان اسکو یوں بیان کرتا ہے:۔ فرض کرو کہ مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلوں کو اول بقدر ا کے اور بعد میں بقدر ب کے گھٹا دیا گیا ہے جہاں ا اور ب کوئی عدد ہیں اور ا، ب سے چھوٹا ہے۔ تب ا اور ب کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اُس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو پہلی استحالہ شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو دوسری استحالہ شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد پر ہے۔

فوریر کے بیان میں یہ بات صریحاً شامل ہے کیونکہ یہ دونوں استحالہ شدہ مساواتیں حسب ذیل ہیں (دیکھو دفعہ ۳۴)

$$\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}_1(\text{ا})\,\text{ما} + \frac{\text{ف}_2(\text{ا})}{1\times 2}\,\text{ما}^2 + \dots + \frac{\text{ف}_{\text{ن}}(\text{ا})}{1\times 2\times\dots\times \text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}} = 0$$

$$\text{ف}(\text{ب}) + \text{ف}_1(\text{ب})\,\text{ما} + \frac{\text{ف}_2(\text{ب})}{1\times 2}\,\text{ما}^2 + \dots + \frac{\text{ف}_{\text{ن}}(\text{ب})}{1\times 2\times\dots\times \text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}} = 0$$

دفعہ ماسبق کے نتیجوں کو تسلیم کرنے کے بعد ان مساواتوں سے مسئلہ بالا کی صداقت ظاہر ہے۔

اس شکل میں مسئلہ کے عملی طور پر سہولت بخش ہونے کی وجہ یہ ہے کہ ہم اصلوں کو گھٹانے کا وہ طریقہ استعمال کر سکتے ہیں جو دفعہ ۳۴ میں بتایا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

لا^۵ - ۲ لا^۴ - ۲۴ لا^۳ + ۹۵ لا^۲ - ۴۶ لا - ۱۰۱ = ۰

کی اصلوں کا محل وقوع معلوم کرو –

ہم اس تفاعل کی جانچ لا کی اُن قیمتوں کے لئے کرتے ہیں جو وقفوں

-۱۰، -۱، ۰، ۱، ۱۰

کے درمیان واقع ہیں – اِن عددوں کو صرف اس وجہ سے اختیار کیا گیا ہے کہ عمل حساب میں سہولت پیدا ہو – اصلوں کو بقدر ایک کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے

193) ۱، ۲، -۲۶، ۱۵، ۶۵، -۸،

اصلوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹایا جائے تو عمل حساب کی ابتدا ہی میں یہ ظاہر ہو جاتا ہے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہونگی – اس لئے اس صورت میں عمل حساب کی تکمیل کرنے کی ضرورت نہیں –

اصلوں کو بقدر -۱۰ اور -۱ کے گھٹانے میں سہولت اس میں ہے کہ مساوات کی متبادل علامتوں کو بدل کر اصلوں کو بقدر +۱۰ اور +۱ کے گھٹایا جائے اور پھر حاصل شدہ نتیجہ میں متبادل علامتوں کو بدلا جائے۔ جب اصلوں کو بقدر -۱ کے گھٹایا جاتا ہے تو استحالہ شدہ مساوات کے سر حاصل ہوتے ہیں

۱، -۸، -۲، ۱۳۹، -۲۹۱، ۶۰

اصلوں کو بقدر -۱۰ کے گھٹانے میں گزشتہ کی طرح اثنائے عمل میں ہی ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ استحالہ شدہ مساوات کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یعنی جب متبادل علامتوں کو بدلا جاتا ہے تو وہ باری باری سے مثبت اور منفی ہوتی ہیں –

اس طرح ہمیں ذیل کا نقشہ ملتا ہے :–

(-۱۰)	+ - + - + -،
(-۱)	+ - - + - +،
(۰)	+ - - + - -، (خود مساوات کی علامتیں)

(۱) + + - + + - ،

(۱۰) + + + + + + +

یہ علامتیں وہ علامتیں ہیں جو ف (لا) اور اس کے مختلف مشتق تفاعل ف۱، ف۲، ف۳، ف۴ اس وقت اختیار کرتے ہیں جب مجوزہ عددوں کو لا کی بجائے درج کیا جائے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ ان کو یہاں دفعہ ۹۲ کی ترتیب کی بموجب نہیں بلکہ اس کے بالعکس لکھا گیا ہے یعنی ف، ف۲، ف۳، ف۴، ف۔

نقشہ بالا سے ہم ذیل کے نتیجے اخذ کرتے ہیں:- سب اصلوں کو -۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ ایک حقیقی اصل -۱۰ اور -۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ ایک حقیقی اصل -۱ اور صفر کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ صفر اور ۱ کے درمیان کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوتی۔ ۱ اور ۱۰ کے درمیان، چونکہ علامت کی تین تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں، کم از کم ایک حقیقی اصل ہے۔ لیکن باقی دو اصلوں کی نوعیت مشتبہ رہجاتی ہے یا تو وہ خیالی ہیں یا ۱ اور ۱۰ کے درمیان تین حقیقی اصلیں ہیں۔

ہم یہ عمل کر سکتے ہیں کہ مزید استحالوں کے ذریعہ ۱ اور ۱۰ کے درمیانی وقفہ کو تنگ کر کے اسکی جانچ کریں تاکہ دونوں مشتبہ علامتوں کی نوعیت معلوم ہو سکے لیکن یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو اس مقصد کے لئے حسابی اعمال میں بہت زیادہ محنت برداشت کرنی ہوگی۔ فوریر اور بوڈان کے مسئلہ کا یہی نقص ہے۔ دونوں نے اس نقص کو دور کرنے کی کوشش کی ہے اور مشتبہ وقفوں میں اصلوں کی نوعیت معلوم کرنے کے طریقے دریافت کئے ہیں لیکن یہ طریقے پیچیدہ ہیں اس لئے ہم ان کو درج نہیں کرتے خصوصاً اس وجہ سے بھی کہ اسٹرم کے مسئلہ سے وہ تمام مقاصد پورے ہو جاتے ہیں جنکے لئے فوریر اور بوڈان نے طریقے ایجاد کئے تھے۔

(194)

۲ـ مساوات

$لا^4 + لا^3 - ۲ لا - ۱ = ۰$

کی اصلوں کے محل وقوع معلوم کرو۔

اسکی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ـ ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۲۶۴)۔جب کبھی کسی مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو فوریر کے تفاعلوں کی علامتوں سے کسی دو مجوزہ صحیح عددوں کے درمیان حقیقی اصلوں کی صحیح تعداد معلوم ہو جاتی ہے ۔ چنانچہ ہم نتیجۂ ذیل حاصل کرتے ہیں :ـ اصلیں وقفوں

(ـ۲،ـ۱)، (ـ۱، ۰)، (۱، ۲)

کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

۳ـ مساوات

$لا^5 + لا^4 - ۴ لا^3 - ۳ لا^2 + ۳ لا + ۱ = ۰$

کا تجزیہ کرو۔

جواب :ـ وقفہ (ـ۲،ـ۱) میں دو اصلیں اور وقفوں (ـ۱، ۰)، (۰، ۱)، (۱، ۲) میں سے ہر ایک میں ایک اصل۔

۴ـ مساوات

$لا^4 - ۸۰ لا^3 + ۱۹۹۸ لا^2 - ۱۴۹۳۷ لا + ۵۰۰۰ = ۰$

کا تجزیہ کرو۔

اس مساوات میں منفی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ اصلوں کو متواتر بقدر ۱۰ کے گھٹاؤ یہانتک کہ سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہو جائیں۔ نتیجۂ ذیل حاصل ہوگا:ـ

(۰)	+ − + − + ،
(۱۰)	+ − + + − ،
(۲۰)	+ . − + + ،
(۳۰)	+ + + − + ،
(۴۰)	+ + + + +

اس طرح صفر اور ۱۰ کے درمیان ایک اصل ہے، ۱۰ اور ۲۰ کے درمیان ایک اصل، ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان کوئی اصل نہیں ۔ ۳۰ اور ۴۰ کے درمیان یا تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا خیالی اصلوں کا ایک زوج ۔ تیسری استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر اکائیوں کے گھٹانے سے یہ معلوم ہوگا کہ دو حقیقی اصلیں موجود ہیں ۔ اس عمل سے اصلیں علحدہ ہو جائینگی اور (۲، ۳) اور (۴، ۵) کے درمیان انکا واقع ہونا معلوم ہو جائیگا ۔ پس مجوزہ مساوات کی تیسری حقیقی اصل وقفہ (۳۲، ۳۳) میں واقع ہوتی ہے اور چوتھی، وقفہ (۳۴، ۳۵) میں ۔

۹۴ ۔ مسئلہ کا استعمال خیالی اصلوں پر ۔ اب چونکہ لا جب $-\infty$ سے $+\infty$ تک گذرتا ہے تو علامت کی صرف ن تبدیلیاں کم ہو سکتی ہیں اس لئے اگر یہ یقین کرنیکی وجہ موجود ہو کہ کسی وقفہ میں جسمیں لا کی کوئی حقیقی اصل شامل نہیں ہوتی علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں تو ہم یہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ خیالی اصلوں کا ایک زوج موجود ہے ۔ یہ مسئلہ استعمال کرتے وقت اس قسم کے حالات اسوقت پیدا ہوں گے جب کسی استحالہ شدہ مساوات میں معدوم ہونیوالے سر شامل ہوں ۔ کیونکہ ہم دفعہ ۷۶ کے اصول کی مدد سے ایسے سر کی واجبی علامت متعین کر سکتے ہیں جو لا کی اس قیمت کے عین پیشتر اور عین بعد کی قیمتوں کے جواب میں ہو جس کے اندراج سے یہ سر معدوم ہوتا ہے ۔ یہ پورا وقفہ اتنا چھوٹا لینا چاہئے کہ ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل اسمیں شامل نہ ہونے پائے ۔

مثالیں

۱ ۔ مساوات

$$ف(لا) \equiv لا^{۴} - ۴لا^{۳} - ۳لا + ۲۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو ۔

(195)

ہم اس تفاعل کا امتحان وقفوں ۰، ۱، ۲ کے درمیان کرینگے استحالہ شدہ مساواتیں ہونگی

$$\frac{۱}{۲۴} ف_{۴}(۰) لا^{۴} + \frac{۱}{۶} ف_{۳}(۰) لا^{۳} + \frac{۱}{۲} ف_{۲}(۰) لا^{۲} + ف_{۱}(۰) لا + ف(۰) = ۰،$$

$$\frac{۱}{۲۴} ف_{۴}(۱) لا^{۴} + \frac{۱}{۶} ف_{۳}(۱) لا^{۳} + \frac{۱}{۲} ف_{۲}(۱) لا^{۲} + ف_{۱}(۱) لا + ف(۱) = ۰،$$

$$\frac{۱}{۲۴} ف_{۴}(۱۰) لا^{۴} + \frac{۱}{۶} ف_{۳}(۱۰) لا^{۳} + \frac{۱}{۲} ف_{۲}(۱۰) لا^{۲} + ف_{۱}(۱۰) لا + ف(۱۰) = ۰،$$

انہیں سے پہلی مساوات خود مجوزہ مساوات ہے۔
دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے حساب لگایا جائے تو $ف_{۲}(۱) = ۰$ اور ہمیں ذیل کا نقشہ ملیگا:—

+	−	۰	−	+	(۰)
+	−	−	۰	+	(۱)
+	+	+	+	+	(۱۰)

اب ہم ہر اُس سطر کو جس میں صفر شامل ہے دو سطروں سے بدل سکتے ہیں۔ ایک اُس قیمت کے جواب میں جو صفر پیدا کرنیوالی قیمت سے ذرا چھوٹی ہو اور دوسری اُس قیمت کے جواب میں جو اس سے ذرا بڑی ہو علامتیں دفعہ ۶۷ میں بتلائے ہوئے طریقہ کے بموجب متعین ہونگی۔ یہ یاد رہے کہ اوپر کے نقشہ میں مشتق تفاعلوں کو تعبیر کرنے والی علامتیں دفعہ ۶۷ کی ترتیب کے بالعکس لکھی گئی ہیں۔ اب نقشہ بالا کی صورت وہ ہوگی جو ذیل میں درج ہے جہاں ہ ایک بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے:—

+	−	+	−	+	ہ −	(۰)
+	−	−	−	+	ہ +	
+	−	−	−	+	ہ − ۱	(۱)
+	−	−	+	+	ہ + ۱	
+	+	+	+	+		(۱۰)

جہاں - ہ اور + ہ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں اس شرط کے تحت متعین ہوتی ہیں کہ وہ سر (جو صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰) لا = - ہ کے لئے علامت میں اس سر سے مختلف ہونا چاہئے جو اس کے عین داہنی جانب ہے اور لا = + ہ کے لئے یہ دونوں علامتیں وہی ہونی چاہیں ۔

ا - ہ اور ا + ہ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں بھی اسی طرح متعین ہوئی ہیں ۔

(196) اب چونکہ وقفہ (- ہ ، + ہ) میں علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور چونکہ - ہ اور + ہ کے درمیان کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اس لئے خیالی اصلوں کے ایک زوج کا وجود ثابت ہوگیا - ا + ہ اور ۰ ا کے درمیان علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے اس وقفہ میں یا تو حقیقی اصلوں کا ایک زوج شامل ہے یا خیالی اصلوں کے ایک زوج کا امکان ہے۔ ان میں سے کونسی صورت صحیح ہے یہ مشتبہ ہے ۔

۲۔ اگر متعدد سر معدوم ہوں تو ہم خیالی اصلوں کے متعدد ازواج کا وجود ثابت کر سکتے ہیں ۔ یہ بات ذیل کی مثال سے تشریح ہے :-

لا^۶ - ا = ۰

- ہ اور + ہ کے جواب میں علامتیں دفعہ ۶۷ کے مسئلہ کی رو سے یہ ہونگی :-

(- ہ) + - + - + - -

(+ ہ) + + + + + + -

پس چونکہ - ہ اور + ہ کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں اور چونکہ صفر سے ذرا چھوٹی قیمت سے صفر سے ذرا بڑی قیمت تک جانے میں علامتوں کی چار تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اس لئے ہمیں خیالی اصلوں کے دو زوجوں کے وجود کا یقین ہو جاتا ہے۔ باقی دو اصلیں اس صورت میں صریحاً حقیقی ہیں (دیکھو دفعہ ۱۸۱) کسی ثنائی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد اس طریقہ سے متعین کیجا سکتی ہے ۔

۳ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{5} + 10\,\text{لا}^{3} + \text{لا} - 4 = 0$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو ۔

لا کی ایک چھوٹی منفی قیمت سے اس کی ایک چھوٹی مثبت قیمت تک ہمیں علامتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے :۔

(−۵) + − + − + + − + −

(۰) + · · · · + · + −

(+۵) + + + + + + + + −

اب چونکہ یہاں علامت کی چھ تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے خیالی اصلیں تعداد میں چھ ہیں ۔ باقی دو اصلیں دفعہ ۱۴ کی رو سے حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی ۔ منفی اصل ـ ۲ اور ـ ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل صفر اور ایک کے درمیان ۔

۴ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{6} - 3\,\text{لا}^{2} - \text{لا} + 1 = 0$$

کا مکمل تجزیہ کرو ۔

اس کی دو اصلیں خیالی ہیں ۔ جب کبھی (جیسا کہ موجودہ صورت میں) اصلیں چھوٹے حدود کے اندر واقع ہوں تو بقدر ایک کے متواتر گھٹانے میں سہولت ہوگی ۔ اس طریقہ سے ہم یہاں صفر اور ایک کے درمیان ایک اصل معلوم کرتے ہیں اور دوسری ۱ اور ۲ کے درمیان ۔ منفی اصلوں کو معلوم کرتے وقت ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بقدر ـ ۱ کے گھٹانے میں خود ـ ۱ ایک اصل ہے اور ـ ۱ سے ذرا بڑی قیمت کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتوں کو لکھ لینے سے ـ ۱ اور صفر کے درمیان دوسری منفی اصل کا موجود ہونا معلوم ہوتا ہے ۔

۵ ـــ مساوات ذیل کا تجزیہ کرو ۔

$$\text{لا}^{5} + \text{لا}^{4} + \text{لا}^{2} - 25\,\text{لا} - 36 = 0$$

اسکی دو اصلیں خیالی ہیں۔ ۲ اور ۳ کے درمیان ایک حقیقی اصل ہے اور وقفوں (-۳، -۲) اور (-۲، -۱) کے درمیان دو حقیقی منفی اصلیں ہیں۔

(197)

۹۵ ــ فوریر اور بوڈان کے مسئلے سے نتائج صریح:۔ خیالی اصلوں کے وجود کا پتہ لگانیکا وہ طریقہ جو دفعہ ۸ سبق میں بیان ہوا دوہری علامت کا قاعدہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح کا ایک قانون جو ڈی گوا سے منسوب کیا جاتا ہے فوریر کے مسئلہ کے انکشاف سے پہلے رائج تھا۔ یہ اور ڈیکارٹ کا قانون علامت فوریر کے مسئلہ کے نتائج صریح ہیں جیساکہ ہم اب ثابت کرینگے ــ

نتیجہ صریح (۱) ــ خیالی اصلوں کو معلوم کرنیکے لئے ڈی گوا کا قاعدہ ــ

اس قاعدہ کو عموماً یوں بیان کیا جاتا ہے:۔ **جب کسی مساوات میں ۲ م متواتر رقمیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م ہونگی۔ اور جب ۲ م + ۱ متواتر رقمیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م + ۲ یا ۲ م ہونگی بموجب اسکے کہ جن دو رقموں کے درمیان رقموں کی یہ کمی واقع ہوتی ہے وہ علامت میں موافق یا مخالف ہوں۔**

یہ قاعدہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دفعہ ۹۲ (۴) کی طرح، اس بات کی جانچ کریں کہ لا کے ایک چھوٹی منفی قیمت - ۰ سے ایک چھوٹی مثبت قیمت + ۰ تک جانے میں علامت کی کتنی تبدیلیاں کم ہوتی ہیں ــ

نتیجۂ صریح (۲) ۔ ڈیکارٹ کا قانونِ علامت ۔

تفاعلوں کے سلسلہ $ف_ن(لا)$، $ف_{ن-۱}(لا)$، $ف_{ن-۲}(لا)$...

... $ف_۲(لا)$، $ف_۱(لا)$، $ف(لا)$ میں لا کی بجائے اگر صفر درج کیا جائے تو علامتیں وہی ہونگی جو مجوزہ مساوات کے سروں $ا$، $ا_۱$، $ا_۲$ ..... $ا_{ن-۱}$، $ا_ن$ کی ہیں لیکن $+\infty$ درج کیا جائے تو سب علامتیں مثبت ہونگی ۔ فوریر کے مسئلہ میں یہ ثابت ہوا ہے کہ ان حدود کے درمیان اصلوں کی تعداد یعنے مثبت اصلوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی اُس تعداد سے زیادہ نہیں ہوسکتی جو صفر سے $+\infty$ تک گذرنے میں کم ہو جاتی ہیں یعنے علامت کی تبدیلیوں کی اُس تعداد سے جو سلسلہ $ا$، $ا_۱$، $ا_۲$ ..... $ا_ن$ میں پائی جاتی ہے ۔ مثبت اصلوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون یہی ہے اور منفی اصلوں کے لئے بھی اسی طرح کا قانون حاصل ہوتا ہے اگر ہم منفی اصلوں کو مثبت اصلوں سے بدل دیں ۔

نتیجۂ صریح (۳) ۔ جب ایک عدد ہ ایسا معلوم ہو جائے جو تفاعلوں $ف_ن(لا)$، $ف_{ن-۱}(لا)$، $ف_{ن-۲}(لا)$....، $ف_۲(لا)$، $ف_۱(لا)$، $ف(لا)$ میں سے ہر ایک کو مثبت بناتا ہے تو چونکہ $+\infty$ بھی انمیں سے ہر ایک کو مثبت بناتا ہے اسلئے فوریر کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہ اور ∞ کے درمیان کوئی اصل نہیں ہوسکتی یعنے مثبت اصلوں کی ایک علوی حد ہ ہے اور یہی نیوٹن کا مسئلہ ہے (دفعہ ۸۸) ۔

۹۶ ۔ اسٹرم کا مسئلہ ۔ ہم نے پہلے یہ بتا دیا ہے (دفعہ ۴۷) کہ

کثیر الارقام ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف، (لا) کا مقسوم علیہ اعظم معمولی جبری طریقوں سے نکالکر مساوات ف (لا) = ۰ کی مساوی اصلوں کو معلوم کرنا کس طرح ممکن ہے۔ اسٹرم نے یہی طریقہ اُن امدادی تفاعلوں کو بنانے میں استعمال کیا ہے جن سے کسی مساوات کی اصلوں کو جدا کرنے میں مدد لیجاتی ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف، (لا) کا مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے۔ یکے بعد دیگرے آنیوالے باقی درجہ میں گھٹتے جائینگے یہانتک کہ ہم یا تو ایسے باقی پر پہنچینگے جو اپنے سے عین قبل کے باقی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے یا ایسے باقی پر جس میں متغیر سرے سے شامل ہی نہیں ہوتا یعنی جو عددی ہے۔ موخر الذکر صورت میں مساوی اصلوں کا وجود نہ ہوگا اور قبل الذکر صورت میں جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے مساوی اصلوں کی موجودگی ظاہر ہوتی ہے۔ اسٹرم کے مسئلہ کو ان دو صورتوں میں تقسیم کر کے ان پر جدا گانہ بحث کرنا سہولت بخش ہے۔ ہم اس دفعہ میں اس صورت پر غور کرینگے جس میں مساوی اصلیں موجود نہیں ہوتیں اور دفعہ آیندہ میں مساوی اصلوں کی صورت پر۔ خود عمل کی تکمیل سے یہ بات واضح ہو جائیگی کہ کسی دی ہوئی مثال کو کس جماعت سے متعلق کرنا چاہئے۔

اسٹرم کے امدادی تفاعل وہ باقی نہیں ہیں جو عمل حساب میں خود پیش ہوتے ہیں بلکہ وہ باقی جنکی علامتیں تبدیل کردی گئی ہوں۔ دو جملوں کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے میں باقیوں کی علامتوں کو بدلنے یا نہ بدلنے سے کوئی ہرج واقع نہیں ہوتا لیکن اسٹرم کے امدادی تفاعل بنانے میں انکی تبدیلی لازمی ہے۔ اس لئے ہم آیندہ یہ فرض کرینگے کہ ہر باقی کی علامت اس کے مقسوم علیہ ہونے سے پیشتر بدلدی گئی ہے۔ فی الحال اس صورت کو لیتے ہیں جس میں مساوی اصلیں موجود نہ ہوں

اسٹرم کا مسئلہ یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

مسئلہ :- فرض کرو کہ ن + ا تفاعلوں کے سلسلہ

ف (لا)، ف$_1$ (لا)، ف$_2$ (لا)، ..... ف$_{ن-1}$ (لا)، ف$_ن$ (لا)

میں لا کی بجائے کوئی دو حقیقی مقداریں ا اور ب درج کی گئی ہیں جہاں سلسلہ بالا میں دیا ہوا تفاعل ف (لا)، اس کا پہلا مشق ف$_1$ (لا)، اور ف (لا) اور ف$_1$ (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگرے آنیوالے باقی (بہ تبدیل علامت) شامل ہیں۔ تب سلسلہ بالا میں علامت کی تبدیلیوں کی وہ تعداد جو لا کی بجائے ا درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور وہ تعداد جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے ان دونوں کا فرق، مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی تعداد کو جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں ٹھیک طور پر بیان کرتا ہے۔ (199)

اسٹرم کے تفاعلوں کو بنانے کے طریقہ سے مساواتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے جسمیں ق$_1$، ق$_2$، .... ق$_{ن-1}$ وہ خارج قسمت ہیں جو مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے ہیں :-

$$(1)\quad \begin{cases} ف(لا) = ق\,ف_1(لا) - ف_2(لا) \\ ف_1(لا) = ق_2\,ف_2(لا) - ف_3(لا) \\ \cdots\cdots\cdots \\ ف_{ر-1}(لا) = ق_ر\,ف_ر(لا) - ف_{ر+1}(لا) \\ \cdots\cdots\cdots \\ ف_{ن-2}(لا) = ق_{ن-1}\,ف_{ن-1}(لا) - ف_ن(لا) \end{cases}$$

ان مساواتوں میں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے طریقہ کا نظریہ شامل ہے۔ کیونکہ پہلی مساوات سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف ۱ (لا) میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو اسکو ف ۲ (لا) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہیئے، اور دوسری مساوات سے اسی طرح کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہی جزو ضربی ف ۳ (لا) میں بھی واقع ہونا چاہیئے، وقس علی ہذا، یہانتک کہ ہم آخری باقی پر پہنچ جائیں جو ف (لا) اور ف ۱ (لا) میں مشترک اجزائے ضربی ہونے کی صورت میں ایسا کثیر الارقام ہوگا جسمیں یہ اجزائے ضربی شامل ہونگے۔ اس دفعہ میں جہاں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ دئے ہوئے کثیر الارقام اور اس کے پہلے مشتق تفاعل میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں ہے آخری باقی ف ن (لا) عددی ہوگا۔ مسئلہ کے ثبوت کے لئے اس بات کا مشاہدہ کرنا بھی لازمی ہے کہ زیر بحث صورت میں سلسلہ کے کوئی دو متصلہ تفاعل کوئی مشترک جزو ضربی نہیں رکھتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ہم اسی طرح کے استدلال سے جو اوپر استعمال ہوا مندرجۂ بالا مساواتوں کے ذریعہ یہ ثابت کرسکتے کہ اس جزو ضربی کو ف (لا) اور ف ۱ (لا) میں بھی موجود ہونا چاہیئے اور ایسی صورت ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ پس لاکو ا سے ب تک جانے میں سلسلہ بالا میں علامت کی جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں ان کا امتحان کرتے وقت

(200)

ہم وہ صورت خارج کر سکتے ہیں جس میں دو متصلہ تفاعل متغیر کی ایک ہی قیمت کے لئے معدوم ہوتے ہیں چنانچہ وہ مختلف صورتیں جنمیں علامت کی کوئی تبدیلی واقع ہوسکتی ہے ذیل میں درج کیجاتی ہیں:۔

(۱) جب 'لا' مجوزہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرے

(۲) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گذرے جو امدادی تفاعلوں

$ف_۱$، $ف_۲$، ۔ ۔ ۔ ۔ ۔، $ف_{ن-۱}$ میں سے ایک کو صفر بناتی ہے۔

(۳) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گذرے جو سلسلہ

ف، $ف_۱$، $ف_۲$، ۔ ۔ ۔ ۔ ۔، $ف_{ن-۱}$ میں سے دو یا زیادہ تفاعلوں کو

صفر بناتی ہے بشرطیکہ معدوم ہونیوالے دو تفاعل متصلہ نہ ہوں۔

(۱) جب 'لا' مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرتا ہو تو دفعہ ۵ ، سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ گذرنیکے عین قبل ف (لا) اور $ف_۱$ (لا) مختلف علامتیں رکھتے ہیں اور گذرنیکے عین بعد موافق علامتیں۔

(۲) فرض کرو کہ لا کی قیمت ع سے مساوات $ف_ر$ (لا) = ۰ پوری ہوتی ہے تو مساوات

$$ف_{ر-۱}(لا) = ق_ر\, ف_ر(لا) - ف_{ر+۱}(لا)$$

سے

$$ف_{ر-۱}(ع) = - ف_{ر+۱}(ع)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ لا کی اس قیمت سے $ف_{ر-۱}$ (لا) اور $ف_{ر+۱}$ (لا) کی عددی قیمت ایک ہی ہوتی ہے مگر مختلف

علامتوں کے ساتھ ۔ عہ سے ذرا کم قیمت سے ذرا بڑی قیمت تک گذرنے میں ہم اس وقفہ کو اتنا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ اسمیں ف$_{ر-1}$(لا) یا ف$_{ر+1}$(لا) کی کوئی اصل شامل نہ ہو ۔ اس لئے زیر بحث پورے وقفہ میں یہ دونوں تفاعل اپنی اپنی علامتیں برقرار رکھتے ہیں ۔ اگر ف$_{ر}$(لا) کی علامت نہ بدلے (اور یہ بات اس صورت میں واقع ہوگی جب اصل عہ جفت مرتبہ تکرار پاتی ہو) تو ان تینوں کے سلسلہ میں کوئی تغیر نہ ہوگا ۔ عموماً ف$_{ر}$(لا) کی علامت بدلیگی لیکن اس سے تینوں تفاعلوں کے حبٹ میں نہ تو علامتوں کے کسی تغیر کا اضافہ ہوگا نہ کمی کیونکہ ف$_{ر-1}$(لا) اور ف$_{ر+1}$(لا) میں علامتوں کا اختلاف ہونے کی وجہ سے گذرنے کے عین قبل اور عین بعد دونوں صورتوں میں علامتوں کا ایک تغیر اور ایک استقلال موجود ہوگا خواہ درمیانی تفاعل ف$_{ر}$(لا) کی علامت کچھ بھی ہو ۔ مثلاً اگر گذرنے کے قبل علامتیں + - - ہوں تو گذرنے کے بعد یہ + + - ہو جائیں گی یعنی ایک تغیر اور ایک استقلال ایک استقلال اور ایک تغیر میں بدل گئے ہیں لیکن علامت کے تغیروں کی تعداد میں بحیثیت مجموعی کوئی کمی بیشی نہیں ہوئی ۔

(۳) پچھلی صورتوں میں استدلال کی بنیاد چونکہ صرف ان روابط پر رکھی گئی ہے جو ایک تفاعل کو اس کے متصلہ تفاعلوں کے ساتھ ہوتے ہیں اور چونکہ یہ روابط موجودہ صورت میں غیر متبدل رہتے ہیں کیونکہ کوئی دو متصلہ تفاعل باہم معدوم نہیں ہوتے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ف(لا) معدوم ہونیوالے تفاعلوں میں سے ایک تفاعل ہو تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور اگر ف(لا) معدوم نہ ہو تو علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ

(201

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ جب ' لا ' مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرتا ہے تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور کسی دوسرے حالات کے تحت علامت کی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ - اس لئے لا کے ا سے ب تک جانے میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ' ا اور ب کے درمیان مساوات کی اصلونکی تعداد کے مساوی ہوتی ہے*۔

مساوی اصلوں کی صورت پر غور کرنے سے پیشتر ہم اسٹرم کے مسئلہ کو چند سادہ مثالوں سے واضح کرینگے - عملاً سہولت اس میں ہے کہ اسٹرم کے تفاعلوں میں لا کی بجائے پہلے - ∞ ' ۰ ' + ∞ درج کیا جائے تاکہ منفی اور مثبت اصلوں کی کل تعداد حاصل ہو جائے - منفی اصلوں کو جدا کرنیکے لئے اعداد صحیح - ۱ ' - ۲ ' - ۳ ' وغیرہ کو متواتر درج کرنا ہوگا یہانتک کہ ہم علامتوں کے اس سلسلہ پر پہنچ جائیں جو - ∞ کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے - مثبت اصلوں کو جدا کرنیکے لئے ہم ۱ ' ۲ ' ۳ ' وغیرہ کا اندراج کرتے ہیں یہانتک کہ علامتونکا وہ سلسلہ حاصل ہو جائے جو + ∞ کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے -

---

* طالب علم کو یہ معلوم کرنے میں اکثر دقت ہوگی کہ اسٹرم کے سلسلہ میں کم شدہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو کس طرح محفوظ کیا جا سکتا ہے کیونکہ جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ صرف پہلے دو تفاعلوں ف (لا) اور ف۱ (لا) کے درمیان واقع ہوتا ہے - اس دقت کو دور کرنیمیں اس بات سے مدد مل سکتی ہے کہ جب ' لا ' ف (لا) = ۰ کی ایک اصل عہ سے دوسری اصل یہ تک بڑھتا ہے تو اگرچہ علامت کی تبدیلیونکی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا لیکن ف۱ (لا) اور بعد کے تفاعلوں میں علامتوں کی تقسیم اس طور پر بدلتی ہے کہ ف (لا) اور ف۱ (لا) کی علامتیں جو لا کے عہ میں سے گذرنیکے عین بعد ایک ہی تھیں یہ میں سے گذرنیکے عین قبل پھر مختلف ہو جاتی ہیں -

مثالیں

۱ــــ مساوات

ف (لا) ≡ لا^3 − ۲ لا − ۵ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور اِن کا محل وقوع معلوم کرو ـ

یہاں ف$_1$ (لا) = ۳ لا^2 − ۲، ف$_2$ (لا) = ۴ لا + ۱۵، ف$_3$ (لا) = −۶۴۳،

لا کی قیمتوں − ∞، ۰، + ∞ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

(− ∞) − + − −

(۰) − − + −

(+ ∞) + + + −

پس صرف ایک حقیقی اصل ہے اور وہ مثبت ہے ـ

پھر لا کی قیمتوں ۱، ۲، ۳ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

(۱) − + + −،

(۲) − + + −،

(۳) + + + −،

اسلئے یہ حقیقی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے ـ

۲ــــ مساوات

لا^3 − ۷ لا + ۷ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع معلوم کرو ـ

ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

ف$_1$ (لا) = ۳ لا^2 − ۷ ،

ف$_2$ (لا) = ۲ لا − ۳ ،

ف$_3$ (لا) = ۱

(202)

اور

+ − + − (−∞)

+ − − + (۰)

+ + + + (+∞)

پس تمام اصلیں حقیقی ہیں، ایک منفی اور دو مثبت۔

نیز ہمیں ذیل کے نتیجے ملتے ہیں:-

+ − + − (−۴)

+ − + + (−۳)

+ − + + (−۲)

+ − − + (−۱)

+ − − + (۱)

+ + + + (۲)

یہاں −۴ اور +۲ سے علامتوں کے وہی سلسلے ملتے ہیں جو −∞ اور +∞ سے حاصل ہوتے ہیں اور اسلئے ہم انہیں پر رک جاتے ہیں۔ منفی اصل −۴ اور −۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دو مثبت اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان۔

اس مثال سے فوریر کے مسئلہ پر اسٹرم کے مسئلہ کی فوقیت واضح ہو جاتی ہے۔

فوریر کے تفاعلوں میں ۱ اور ۲ کے اندراج سے علامتوں کے حسب ذیل سلسلے ملینگے جنکی تصدیق آسانی کے ساتھ کیجا سکتی ہے:-

+ + − + (۱)

+ + + + (۲)

اب فوریر کے مسئلہ سے ہم صرف یہ نتیجہ نکالنے کا حق رکھتے ہیں کہ ۱ اور ۲ کے درمیان دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ لیکن اسٹرم کے

مسئلہ سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ۱ اور ۲ کے درمیان دو اصلیں ہیں ۔ اگر ان اصلوں کو جدا کرنا مقصود ہو تو ہمیں ف(لا) میں مزید اندراجات کرنے چاہئیں ۔

۳ ۔ مساوات

لا^۴ ـ ۲ لا^۳ ـ ۳ لا^۲ ـ ۱۰ لا ـ ۴ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع دریافت کرو ۔

مشتق سے جزو ضربی ۲ کو علیحدہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

ف۱ (لا) = ۲ لا^۳ ـ ۳ لا^۲ ـ ۳ لا + ۵

ف۲ (لا) = ۹ لا^۲ ـ ۲۷ لا + ۱۱

ف۳ (لا) = ـ ۸ لا ـ ۳

ف۴ (لا) = ـ ۱۴۳۳

[نوٹ :۔ جیسا کہ مساواتوں (۱) سے واضح ہے اسٹرم کے تفاعلوں کو بنانے میں اسکی اجازت ہے کہ عددی اجزائے ضربی کو داخل یا خارج کیا جائے بالکل اسی طرح جس طرح مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں لیکن اس بات کا خیال رہے کہ یہ اجزا مثبت ہوں تاکہ باقیوں کی علامتیں بدلنے نہ پائیں ۔]

(203)

علامتوں کے حسب ذیل سلسلے ملینگے

(ـ ∞) + ـ + + ـ

(۰) ـ + + ـ ـ

(+ ∞) + + + ـ ـ

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور ایک منفی اور دو اصلیں خیالی ہیں حقیقی اصلوں کا مقام معلوم کرنیکے لئے صرف ف(لا) میں مثبت اور منفی اعداد صحیح کو متواتر درج کرنا کافی ہے کیونکہ صرف ایک اصل مثبت اور ایک اصل منفی ہے ۔ اس طریقہ سے ہمیں بہ آسانی معلوم ہو جائیگا کہ منفی اصل ـ ۲ اور ـ ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل

صفر اور ایک کے درمیان ۔

۹۷ ــ اسٹرم کا مسئلہ ــ مساوی اصلیں ــ فرض کرو کہ

ف(لا) اور فَ(لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کردیا گیا ہے اور حسب سابق متواتر آنیوالے باقیوں کی علامتیں بدل دی گئی ہیں۔ اسٹرم کا آخری تفاعل موجودہ صورت میں عددی نہیں ہوگا کیونکہ یہاں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ف(لا) اور فَ(لا) کا ایک مشترک جزو ضربی ایسا ہے جس میں لا شامل ہوتا ہے اور اسلئے یہی وہ آخری تفاعل ہوگا جو متذکرہ صدر عمل سے حاصل ہوتا ہے ۔ فرض کرو کہ تفاعلوں کا سلسلہ ہے

$$ف(لا)،\ ف_1(لا)،\ ف_2(لا)،\ \ldots،\ ف_ر(لا)$$

اب ف(لا) = ۰ کی ضعفی اصل کے سوا لا جب کسی قیمت میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ماسبق کے نتائج سلسلہ بالا پر بھی صادق آتے ہیں کیونکہ کوئی قیمت سوائے ضعفی اصل کے سلسلہ کے کسی دو متصلہ تفاعلوں کو معدوم نہیں کرسکتی ۔ لیکن جب لا مساوات ف(لا) = ۰ کی ایک ضعفی اصل میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ۷۵ کے نتیجہ صریح کی رو سے ف(لا) اور $ف_1$(لا) کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہوجاتی ہے اور اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ سلسلہ کے باقی دوسرے تفاعلوں یعنی $ف_1$، $ف_2$، ...، $ف_ر$ میں علامت کی کسی تبدیلی کا نہ اضافہ ہوتا ہے نہ کمی ۔ فرض کرو کہ ف(لا) کی ایک م ضعفی اصل عہ موجود ہے تو دفعہ ۹۶ کی مساواتوں (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ تفاعلوں $ف_1$، $ف_2$، ...، $ف_ر$ میں سے ہر ایک میں $(لا - عہ)^{م-1}$ ایک جزو ضربی ہے فرض کرو کہ ان تفاعلوں میں بقیہ اجزائے ضربی علی الترتیب $فہ_1$، $فہ_2$، ...، $فہ_ر$ ہیں ۔ مذکورہ بالا مساواتوں (۱) کو $(لا - عہ)^{م-1}$ سے تقسیم کرو تو

(204)

مساواتوں کا ایک سلسلہ ملیگا جن سے دفعہ ما سبق کے استدلال کو استعمال کرنے سے یہ ثابت ہو جائیگا کہ عہ میں سے گذرنے کی وجہ سے سلسلہ فہ، فہ، ..... فہر میں علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ، اسلئے سلسلہ ف، ف، .... فر میں بھی علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ کیونکہ لا جب قیمت عہ - ہ سے قیمت عہ + ہ تک جاتا ہے تو جزو ضربی (لا - عہ)م-۱ کا یہ اثر ہوگا کہ یا تفاعلات فہ، فہ، .... فہ میں سے سب کی علامتیں بدل دیگا (اگر م - ۱ طاق ہو) یا کسی کی نہیں (اگر م - ۱ جفت ہو) اور ان سب تفاعلوں کی علامتوں کے بدل جانے سے علامت کے تغیرات کی تعداد نہ گھٹ سکتی ہے نہ بڑھ سکتی ہے۔

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ لا جب ف (لا) = ۰ کی ضعفی اصل میں سے گذرتا ہے تو ف اور ف۱ کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور سلسلہ کے کسی دوسرے حصہ میں علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ البتہ یہ بات درست رہتی ہے کہ لا جب ف (لا) = ۰ کی ایک واحد اصل میں سے گذرتا ہے تو حسب سابق علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ اب ہم مساوی اصلوں کی صورت کے لئے اسٹرم کے مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں :-

سلسلہ

ف، ف۱، ف۲ ..... فر

میں جب ا اور ب درج کئے جائیں تو علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کے درمیان فرق ا اور ب کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے جہاں آخری تفاعل فر، ف اور ف۱ کا

مشترک مقسوم علیہ اعظم ہے اور ہر ضعفی اصل کو صرف ایک مرتبہ شمار کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^4 - ۵ لا^3 + ۹ لا^2 - ۷ لا + ۲ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$ف_1(لا) = ۴ لا^3 - ۱۵ لا^2 + ۱۸ لا - ۷$$

$$ف_2(لا) = لا^2 - ۲ لا + ۱$$

$ف_2(لا)$، $ف_1(لا)$ کو پوری طرح تقسیم کردیتا ہے۔ پس اس صورت میں اسٹرم کا سلسلہ $ف_2(لا)$ پر آکر رک جاتا ہے اور اس طرح مساوی اصلوں کے وجود کو ثابت کرتا ہے۔

مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہم تفاعلوں ف، $ف_1$، $ف_2$ کے سلسلہ میں لا کی بجائے $-\infty$ اور $+\infty$ درج کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$(-\infty) \quad + \quad - \quad +$$

$$(+\infty) \quad + \quad + \quad +$$

پس مساوات کی صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ انمیں سے ایک تہری اصل ہے جیسا کہ $ف_2(لا)$ کی شکل سے ظاہر ہے جو $(لا - ۱)^2$ کے مساوی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^4 - ۶ لا^3 + ۱۳ لا^2 - ۱۲ لا + ۴ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

(205)

یہاں

$$ف_۱(لا) = ۴لا^۳ - ۱۸لا^۲ + ۲۶لا - ۱۲$$

$$ف_۲(لا) = لا^۲ - ۳لا + ۲$$

$ف_۲(لا)$ اسٹرم کا آخری تفاعل ہے اور اسلئے مساوات کی مساوی اصلیں موجود ہیں ۔

$$(-\infty) \quad + \quad - \quad +$$

$$(+\infty) \quad + \quad + \quad +$$

صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں اور چونکہ $ف_۲(لا) \equiv (لا-۱)(لا-۲)$ اصلوں ۱ اور ۲ میں سے ہر ایک دوہری اصل ہے ۔

۳ — مساوات

$$لا^۵ + ۲لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - ۲لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت دریافت کرو ۔

یہاں

$$ف_۱ = ۵لا^۴ + ۸لا^۳ + ۳لا^۲ - ۲لا - ۲$$

$$ف_۲ = ۲لا^۳ + ۷لا^۲ + ۱۲لا + ۷$$

$$ف_۳ = -لا^۲ - ۶لا - ۵$$

$$ف_۴ = -لا - ۱$$

$$ف_۵ = ۰$$

چونکہ $ف_۵ = ۰$، ف اور $ف_۱$ کا مشترک مقسوم علیہ اعظم $لا + ۱$ ہے اور $ف(لا)$ کی ایک دوہری اصل -۱ ہے ۔ نیز

$$(-\infty) \quad - \quad + \quad - \quad - \quad +$$

$$(+\infty) \quad + \quad + \quad + \quad - \quad -$$

پس دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں ۔ اسلئے مساوات کی دوہری اصل کے سوا ایک دوسری حقیقی اصل ہے اور دو اصلیں خیالی ہیں ۔

۴ — مساوات

$$لا^{۶} - ۷ لا^{۵} + ۱۵ لا^{۴} - ۴۰ لا^{۲} + ۴۸ لا - ۱۶ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$ف_{۱}(لا) = ۶ لا^{۵} - ۳۵ لا^{۴} + ۶۰ لا^{۳} - ۸۰ لا + ۴۸$$

$$ف_{۲}(لا) = ۱۳ لا^{۴} - ۸۴ لا^{۳} + ۱۹۲ لا^{۲} - ۱۷۶ لا + ۴۸$$

$$ف_{۳}(لا) = لا^{۳} - ۶ لا^{۲} + ۱۲ لا - ۸ \equiv (لا - ۲)^{۳}$$

جواب:- تین جداگانہ حقیقی اصلیں، انمیں سے ایک چوہری اصل

(208)

۹۸ — اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال — اعلیٰ درجہ کی مساواتونکی

صورت میں اسٹرم کے امدادی تفاعلوں کو محسوب کرنیکا عمل اکثر بہت محنت طلب ہو جاتا ہے۔ اسلئے چند ایسے نکات کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے جنکی مدد سے اس محنت میں تخفیف ہونے کا امکان ہے۔

(۱) آخری باقی محسوب کرنے میں جبکہ وہ عددی ہو چونکہ صرف اسکی علامت سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے اس لئے آخری عمل تقسیم سے ہم بچ سکتے ہیں کیونکہ لا کی وہ قیمت جو $ف_{ن-۱}$ کو معدوم کرتی ہے $ف_{ن-۲}$ کو مختلف العلامت بنا دیتی ہے۔ عموماً بغیر کسی عمل حساب کے یہ بتانا ممکن ہے کہ اگر $ف_{ن-۱}(لا) = ۰$ کی اصل کو $ف_{ن-۲}(لا)$ میں درج کیا جائے تو حاصل کی علامت کیا ہوگی۔ چنانچہ دفعہ ۹۶ مثال ۳ میں اگر $ف_{۳}(لا) = ۰$ کی اصل $-\frac{۳}{۸}$ کو $۹ لا^{۲} - ۲۷ لا + ۱۱$ میں لا کی بجائے درج کیا جائے تو حاصل کی علامت صریحاً مثبت ہے، پس $ف_{ن}(لا)$ کی علامت نفی ہے اور اس لئے لا کی قیمت $-\frac{۳}{۸}$ کے جواب میں

ف ن (لا) کی قیمت - ۳۳۴۳۱ کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں۔

(۲) جب کسی طرح سے یہ پہچان لینا ممکن ہو کہ اسٹرم کے تفاعلوں میں سے کسی ایک کی سب اصلیں خیالی ہیں تو کسی اور تفاعل کو اس تفاعل کے آگے محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی کیونکہ ایسا تفاعل متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ ایک ہی علامت برقرار رکھتا ہے (دفعہ ۲۱ نتیجہ صریح) اور اس لئے اسکی اور اسکے بعد آنیوالے تفاعلوں کی علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کبھی بھی کوئی تغیر وقوع پذیر نہیں ہو سکتا چنانچہ جب دو مقداریں ا اور ب درج کیجاتی ہیں تو تبدیلیوں کی تعداد میں جو فرق ہوتا ہے وہ علامتوں کے ان تغیرات پر منحصر نہیں ہوتا جو سلسلہ کے اس حصہ میں موجود ہو سکتی ہیں جس میں زیر بحث تفاعل اور اس کے بعد آنیوالے تفاعل شامل ہیں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرنے میں ہمیشہ مناسب یہ ہے کہ جب ہم دو درجی تفاعل (مثلاً ا لا^۲ + ب لا + ج) پر پہنچیں تو اس بات کا امتحان کرلیں کہ لا^۲ والی رقم اور مطلق رقم ہم علامت ہونے کی صورت میں (اگر ایسا نہیں ہے تو اصلیں خیالی نہیں ہو سکتیں) آیا شرط ۴ ا ج > ب^۲ پوری ہوتی ہے یا نہیں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ اصلیں خیالی ہونگی اور عمل حساب کو آگے بڑھانے کی ضرورت نہیں۔

جب تفاعلوں میں سے کوئی ایک کامل مربع ہو تو اس صورت پر بھی اوپر کے نتائج کا اطلاق ہوتا ہے کیونکہ ایسا تفاعل لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے اپنی علامت نہیں بدل سکتا۔

207)

مثالیں

۱- مساوات

لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۱۰ لا + ۱ = ۰

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف_۲(لا) = -۲۹ لا^۲ - ۸،۷ لا + ۱۴$$

$$ف_۳(لا) = -۱۰۸۶ لا - ۱۸۴$$

$$ف_۴(لا) = -$$

یہاں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا کی وہ قیمت جو مساوات $ف_۳(لا) = ۰$ سے حاصل ہوتی ہے اور جو $-\frac{۱}{۲}$ سے بہت چھوٹا فرق رکھتی ہے $ف_۲(لا)$ کو مثبت بناتی ہے۔ پس $ف_۲(لا)$ منفی ہے۔ مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ حقیقی اصلیں وقفوں (-۲، -۱)، (-۱، ۰) میں واقع ہوتی ہیں۔

۲۔ مساوات

$$لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۳ لا + ۲۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف_۲(لا) = ۱۲ لا^۲ + ۹ لا - ۸۹$$

$$ف_۳(لا) = -۴۹۱ لا + ۱۳۷۱$$

$$ف_۴(لا) = -$$

یہاں $ف_۳(لا) = ۰$ سے حاصل ہوتا ہے $لا = \frac{۱۳۷۱}{۴۹۱} > \frac{۱۳۷۱}{۵۰۰} > ۲،۷۴$ اور $لا = \frac{۵}{۲}$، $ف_۲(لا)$ کو مثبت بناتا ہے۔ اس لئے $ف_۳(لا)$ کی اصل بھی اس کو مثبت بناتی ہے۔

مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ حقیقی اصلیں وقفوں (۲، ۳)، (۳، ۴) میں واقع ہوتی ہیں۔

۳۔ مساوات

$$۲ لا^۴ - ۱۳ لا^۲ + ۱۰ لا - ۱۹ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں

ف۱(لا) = ۴ لا^{۳} − ۱۳ لا + ۵ ،

ف۲(لا) = ۱۳ لا^{۲} − ۱۵ لا + ۳۸

چونکہ ۴ × ۱۳ × ۳۸ > ۱۵^{۲} ، ف۲(لا) کی اصلیں خیالی ہیں اسلئے
ہم اسٹرم کے بقیہ تفاعلوں کو محسوب نہیں کرتے ۔

− ∞ ، ۰ ، + ∞ درج کرنے سے

(− ∞) + − +

(۰) − + +

(+ ∞) + + +

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی ۔

۴ ۔ مساوات

ف(لا) ≡ لا^{۵} + ۲ لا^{۴} + لا^{۳} − ۴ لا^{۲} − ۳ لا − ۵ = ۰

کا تجزیہ کرو ۔

یہاں ف۱(لا) = ۵ لا^{۴} + ۸ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} − ۸ لا − ۳

ف۲(لا) = ۶ لا^{۳} + ۲۶ لا^{۲} + ۴۴ لا + ۱۱۹

ف۳(لا) = − ۱۱۶ لا^{۲} − ۵۷ لا − ۲۲۳

چونکہ ۴ × ۱۱۶ × ۲۲۳ > ۵۷^{۲} ، باقی تفاعلوں کو معلوم کرنیکی ضرورت نہیں ۔ (208)
− ∞ ، ۰ ، + ∞ درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

(− ∞) − + − −

(۰) − − + −

(+ ∞) + + + −

چار اصلیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی مثبت اصل ۔

۵ ۔ مساوات

لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۱۰ لا + ۱۰ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع معلوم کرو ۔

جواب :۔ سب اصلیں حقیقی ہیں دو اصلیں وقفوں (−۳ ، −۲)

(-۱، ۰) میں اور دو اصلیں (۲، ۳) کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

۶ ـــ مساوات

$$لا^5 + ۳ لا^4 + ۲ لا^3 - ۳ لا^2 - ۲ لا - ۲ = ۰$$

کا تجزیہ کرو ـــ

یہ معلوم ہو جائیگا کہ عمل حساب دو درجی باقی پر پہنچتے ہی ختم ہو جا سکتا ہے۔

جواب:۔ صرف ایک اصل حقیقی ہے وقفہ (۱، ۲) میں۔

۷ ـــ مساوات

$$لا^3 + ۱۱ لا^2 - ۱۰۲ لا + ۱۸۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں $ف_۲ (لا) = ۸۵۴ لا - ۲۷۵۱$

$ف_۳ (لا) = ۱۴۴$

بعض مثالوں میں جیسا کہ اوپر کی مثال سے ظاہر ہے فوراً یہ کہنا آسان نہیں ہوتا کہ ایک تفاعل کی اصل سے اس کے ماقبل تفاعل کی علامت کیا ہو جائیگی۔ ہم نے یہاں $ف_۳ (لا)$ کو محسوب کیا اور وہ بہت چھوٹا عدد نکلا حالانکہ $ف_۱ (لا)$ کے سروں کی مقدار سے $ف_۳ (لا)$ کے لئے اس سے بڑے عدد کی توقع ہو سکتی تھی ـ واقعہ یہ ہے کہ اگر ہم $ف_۲ (لا)$ کی اصل کو $ف (لا)$ میں درج کریں تو مثبت حصہ، تقریباً منفی حصہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے ـ یہ ہمیشہ اس بات کی علامت ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہیں ـ موجودہ مثال میں ۳ اور ۴ کے درمیان دو مثبت اصلیں ہیں ـ اس وقفہ کو مزید وقفوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں اصلیں پھر بھی ۳٫۲، ۳٫۳ اور ۳٫۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور اس لئے یہ دونوں باہم بہت قریب ہیں۔ حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان جو تسلسل پایا جاتا ہے اسکی یہ دوسری تمثیل ہے (دیکھو دفعات ۱۷، ۱۸)۔ اگر $ف_۳ (لا)$ صفر ہوتا تو یہ دونوں اصلیں مساوی ہوتیں اور اگر وہ چھوٹا منفی عدد ہوتا تو یہ اصلیں خیالی ہوتیں۔

۸ — مساوات

$$لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} - ۲\,لا^{۲} + ۲\,لا - ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

عمل سے معلوم ہوتا ہے کہ دو درجی تفاعل کی اصلیں خیالی ہیں۔

جواب:۔ ایک حقیقی اصل (۰، ۱) کے درمیان۔ چار خیالی اصلیں۔

(209)

۹ — مساوات

$$لا^{۶} - ۶\,لا^{۵} - ۳۰\,لا^{۲} + ۱۲\,لا - ۹ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں $ف_{۲}(لا) = ۵\,لا^{۴} + ۲۰\,لا^{۲} + ۷$

اور چونکہ اس کی سب اصلیں خیالی ہیں، عمل حساب یہاں پہنچکر ختم کیا جاسکتا ہے۔

جواب:۔ دو حقیقی اصلیں، (−۲، −۱)، (۶، ۷) وقفوں میں واقع ہیں۔

۱۰ — مساوات

$$۲\,لا^{۶} - ۱۸\,لا^{۵} + ۶۰\,لا^{۴} - ۱۲۰\,لا^{۳} - ۳۰\,لا^{۲} + ۱۸\,لا - ۵ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہمیں معلوم ہوگا

$$ف_{۲}(لا) = ۵\,لا^{۴} + ۲۲۰\,لا^{۲} + ۱$$

اور عمل حساب یہاں ختم ہو سکتا ہے۔

جواب:۔ دو حقیقی اصلیں، وقفوں (−۱، ۰)، (۵، ۶) میں واقع ہیں۔

۱۱ — امتحان کرو کہ کس طرح مساوات

$$۲\,لا^{۳} + ۱۵\,لا^{۲} - ۸۴\,لا - ۱۹۰ = ۰$$

کی اصلیں، اعداد −∞، −۷، ۶، +∞ کے درمیان مختلف وقفوں میں واقع ہوتی ہیں۔

یہاں

$$ف_{۱}(لا) = لا^{۲} + ۵\,لا - ۱۴$$
$$ف_{۲}(لا) = ۲۷\,لا + ۴۰$$
$$ف_{۳}(لا) = +$$

مندرجۂ بالا مقداروں کے اندراج سے حاصل ہوگا

(– ∞) – + – +

(– ۷) + ۰ – +

(۶) + + + +

(+ ∞) + + + +

جب کبھی (جس طرح کہ موجودہ مثال میں) کوئی مقدار امدادی تفاعلوں میں سے ایک تفاعل کو صفر بنا دے (یہاں ف۲ (لا) = ۰ کو – ۷ پورا کرتا ہے) تو صفر جس صف میں ہے اس میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد شمار کرنے میں صفر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے کیونکہ اسکی ہر جانب کی علامتیں مختلف ہونے کی وجہ سے صف میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہو سکتا خواہ معدوم ہونیوالی مقدار کی علامت کونسی بھی فرض کر لیجائے۔ سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ایک اصل، – ∞ اور – ۷ کے درمیان، دو اصلیں – ۷ اور ۶ کے درمیان –

۱۲ — مساوات

۳ لا^۳ – ۶ لا^۲ – ۸ لا – ۳ = ۰

کا تجزیہ کرو –

یہاں ف۱ (لا) = ۳ لا^۲ – ۳ لا – ۲

ف۲ (لا) = (لا + ۱)^۲

چونکہ ف۲ (لا) کامل مربع ہے عمل حساب ختم کیا جا سکتا ہے –

جواب :- دو حقیقی اصلیں، وقفوں (– ۱، ۰)، (۱، ۲) میں واقع ہیں۔

۹۹ — مساوات کی اصلوں کے حقیقی ہونیکی شرطیں۔ اسٹرم (210)

کے تفاعلوں کی تعداد جب اس میں ف (لا)، فَ (لا)، اور ن – ۱ باقیوں کو شامل کیا جائے عام طور پر ن + ۱ ہوگی – بعض صورتوں میں مجوزہ مساوات میں چند رقموں کی عدم موجودگی کی وجہ سے چند باقی

موجود نہیں ہونگے۔ یہ صرف اسوقت واقع ہو سکتا ہے جب مجوزہ مساوات
میں خیالی اصلیں ہوں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ لا کے − ∞ سے + ∞ تک
جانے میں تفاعلوں کے سلسلہ میں علامت کی ن تبدیلیوں کا نقصان
ہونے کے لئے سب تفاعلوں کا موجود ہونا ضروری ہے۔ اور مزید براں
یہ سب تفاعل ایک ہی علامت اختیار کریں جبکہ لا = + ∞ اور متبادل
علامتیں جبکہ لا = − ∞ ۔ اب چونکہ مساوات کی پہلی رقم کو ہمیشہ مثبت
علامت کے ساتھ لیا جاتا ہے اس لئے کسی مساوات کی سب اصلوں کے
حقیقی ہونیکی شرط کو یوں بیان کیا جاتا ہے:۔ ن ویں درجہ کی مساوات
کی سب اصلیں حقیقی ہونیکے لئے اسٹرم کے تمام باقیوں کے صدر سر
جو تعداد میں ن − ۱ ہیں مثبت ہونے چاہئیں۔

مثالیں

۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

ا لا^2 + ۲ ب لا + ج = ۰

کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جواب:۔ ب^2 − ا ج > ۰۔

۲۔ وہ شرطیں معلوم کرو کہ کعبی

ی^3 + ۳ ھ ی + گ = ۰

کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جب اس کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ کعبی جس عام
کعبی سے اخذ کیا گیا ہے اسکی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں۔ اس لئے عام کعبی
کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں معلوم کرنے میں مندرجۂ بالا شکل پر بحث
کرنا کافی ہے۔

(211)

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ف_۱(ی) = ی^۲ + ھ$$

$$ف_۲(ی) = -۲ ھ ی - گ$$

$$ف_۳(ی) = -(گ^۲ + ۴ ھ^۳)$$

[انکو محسوب کرنے میں ف۱ (ی) کو ف۲ (ی) سے تقسیم کرنے سے قبل ف۱ (ی) کو مثبت جزو ضربی ۲ ھ^۲ سے ضرب دو۔]

پس مطلوبہ شرطیں ہیں ھ منفی اور $گ^۲ + ۴ ھ^۳$ منفی۔

ان کو ایک شرط میں بیان کیا جا سکتا ہے یعنے $گ^۲ + ۴ ھ^۳$ منفی، کیونکہ اس سے ھ کا منفی ہونا لازم آتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۳)۔

۳ — چاردرجی

$$ی^۴ + ۶ ھ ی^۲ + ۴ گ ی + ا^۲ ع - ۳ ھ^۲ = ۰$$

کے لئے اسٹرم کے باقی محسوب کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف_۲(ی) = -۳ ھ ی^۲ - ۳ گ ی - (ا^۲ ع - ۳ ھ^۲)،$$

$$ف_۳(ی) = -(۲ ھ ع - ۳ ا جے) ی - گ ع،$$

$$ف_۴(ی) = ع^۳ - ۲۷ جے^۲،$$

انکو دفعہ ۷۳ کی متماثل کی مدد سے آسانی کے ساتھ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ف۱ کو ف۲ سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی ۳ ھ^۲ سے ضرب دو اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی ا^۲ کو جدا کر دو۔ ف۲ کو ف۳ سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی (۲ ھ ع - ۳ ا جے)^۲ سے ضرب دو اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی ا^۲ ھ^۲ کو جدا کر دو۔

۱۰۰ — چاردرجی کی اصلوں کے حقیقی ہونیکے لئے شرطیں۔

چوتھے درجہ کی عام جبری مساوات کی اصلوں کی نوعیت کو جانچنے کے معیار اسٹرم کے طریقہ سے حاصل کرنے کے لئے دفعہ ماسبق کی مثال ۳ کی

مساوات پر غور کرنا کافی ہے۔ اس مثال میں اسٹرم کے باقیوں میں صدر رقموں کے سروں کی شکلوں کی مدد سے ہم وہ شرطیں حاصل کر سکتے ہیں کہ چار درجی کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔ چنانچہ ان شرطوں کی شکل یہ ہوگی

ھ منفی، ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے منفی، ع^۳ ـ ۲۷ جے^۲ مثبت

ہم دیکھتے ہیں کہ انہیں سے دوسری شرط شکل میں دفعہ ۶۸ کی متناظر شرط سے مختلف ہے۔ ان دونوں شکلوں کو متماثل ثابت کرنیکے لئے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ جب، ھ منفی اور ∆ مثبت ہو تو مزید شرط ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے کے منفی ہونے سے یہ بات لازم آتی ہے کہ ا^۲ ع ـ ۱۲ ھ^۲ منفی ہو اور اس کے بالعکس۔ دفعہ ۳۷ کی متماثلہ سے جو شکل ـ ھ ۱ ا^۲ ع ـ ۱۲ ھ^۲) ≡ ا^۲ (۲ ھ ع ـ ۳ ا جے) میں لکھی گئی ہے یہ امر بالکل واضح ہے کہ جب، ھ اور ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے دونوں منفی ہوں تو ا^۲ ع ـ ۱۲ ھ^۲ بالضرور منفی ہے۔ اس کا عکس ثابت کرنے کے لئے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ جب، ا جے مثبت ہوتا ہے تو ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے منفی ہے کیونکہ ∆ کے مثبت ہونے کی وجہ سے ع مثبت ہے اور جب ا جے منفی ہوتا ہے تو پھر بھی ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے منفی ہے کیونکہ نامساواتوں ۱۲ ھ^۲ > ا^۲ ع اور ع^۳ > ۲۷ جے^۲ سے فوراً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ منفی حصہ ۲ ھ ع، مثبت حصہ ـ ۳ ا جے سے بڑا ہے۔

طالب علم کو اسٹرم کے تفاعلوں کی مدد سے ان بقیہ نتیجوں کی تصدیق کرنے میں کوئی مشکل نہیں ہوگی جو دفعہ ۶۸ کی مختلف صورتوں میں حاصل ہوئے تھے۔ (212

مثالیں

۱ـ مساوات

لا^۴ ـ ۱۶ لا^۳ + ۶۹ لا^۲ ـ ۷۰ لا ـ ۴۲ = ۰

کی اصلوں کو جدا کرنے میں بوڈان کا طریقہ استعمال کرو ۔

جواب :۔ اسکی اصلیں وقفوں (۔۱، ۰)، (۲، ۳)، (۴، ۵)، (۹، ۱۰) میں ہیں ۔

۲ ۔ مساوات

$$\text{لا}^{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳} + ۷\,\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} - ۴ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو ۔

اس قسم کے چار درجی کا تجزیہ کرنے میں جس کی دو اصلیں صریحاً حقیقی ہیں ہم عمل حساب کو اس وقت ختم کر سکتے ہیں جب اسٹرم کا وہ باقی حاصل ہو جائے جس کی صدر رقم کا سر منفی ہے کیونکہ ایسی صورت میں اصلوں کے دوسرے زوج کو خیالی ہونا چاہئے اور حقیقی اصلوں کے مقامات دی ہوئی مساوات میں اندراج کے ذریعہ آسانی کے ساتھ معلوم کئے جا سکتے ہیں ۔

جواب :۔ دو اصلیں خیالی، دو حقیقی اصلیں وقفوں (۔۱، ۰)، (۲، ۳) میں ۔

۳ ۔ اسی طریقہ پر مساوات

$$\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۳} + ۱۰\,\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} - ۲۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو ۔

جواب :۔ دو اصلیں خیالی ۔ دو حقیقی، (۔۱، ۰)، (۳، ۴) وقفوں میں ۔

۴ ۔ مساوات

$$\text{لا}^{۴} + ۳\,\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - ۳\,\text{لا} + ۱۱ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو ۔

جواب :۔ سب اصلیں خیالی ۔

۵ ۔ اسٹرم کے طریقہ سے مساوات

$$\text{لا}^{۵} - ۱۰\,\text{لا}^{۳} + ۶\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور اِن کا محل وقوع دریافت کرو ۔

جواب :۔ سب اصلیں حقیقی ۔ ایک اصل وقفہ (۔۴، ۔۳) میں، دو اصلیں وقفہ (۔۱، ۰) میں اور دو مثبت اصلیں وقفوں (۰، ۱)، (۳، ۴) میں ۔

۶ ــ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ سب اصلیں حقیقی ہیں :ــ

$$لا^۵ - ۵ لا^۴ + ۵ لا^۳ + ۵ لا^۲ - ۵ لا - ۱ = ۰$$

۷ ــ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ چار اصلیں خیالی ہیں :ــ

$$۳ لا^۵ + ۵ لا^۳ + ۲ = ۰$$

طالب علم بہ آسانی دیکھ لیگا کہ یہ مثال اور مثال ماسبق ایسی مثالیں ہیں جنمیں ایک جزو ضربی ہے جو اسٹرم کے دو غیر متصل باقیوں میں مشترک ہے

۸ ــ مساوات ذیل کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور اصلوں کی نوعیت کے متعلق مثال ۳ صفحہ ۳۱۵ کے نتیجوں کی تصدیق کرو :ــ

$$لا^۵ - ۵ ف لا^۳ + ۵ ف^۲ لا + ۲ ق = ۰$$

(219) ۹ ــ ثابت کرو کہ اگر ج کی ایک کے سوا کوئی قیمت ہو تو مساوات

$$ج^۲ لا^۴ - ۲ ج^۲ لا^۳ + ۲ لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہے ــ

۱۰ ــ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^۳ - (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲) لا - ۲ ا ب ج = ۰$$

کی سب اصلیں حقیقی ہیں ۔ اس کو حل کرو جب مقداروں ا ، ب ، ج میں سے دو مساوی ہو جائیں ــ

۱۱ ــ ثابت کرو کہ جب چار درجی

$$ف(لا) \equiv ا لا^۴ + ۴ ب لا^۳ + ۶ ج لا^۲ + ۴ د لا + س$$

کا ایک جزو ضربی تہرا ہو تو اس کو شکل ذیل میں بیان کیا جا سکتا ہے :ــ

$$ا^۳ ف(لا) \equiv \{ ا لا + ب + \sqrt{-ھ} \}^۳ \{ ا لا + ب - ۳\sqrt{-ھ} \}$$

۱۲ ــ اسٹرم کے باقیوں کے ذریعہ اُن شرطوں کی تصدیق کرو جنکو پورا ہونا چاہیئے جبکہ مثال ماسبق کا چار درجی کامل مربع ہو اور اس صورت میں ثابت کرو کہ

ا ف (لا) = {(ا لا + ب)^۲ + ۳ ھ}^۲

۱۳۔ ثابت کرو کہ جب اسٹرم کے سب تفاعل موجود ہوں تو ان تفاعلوں کی صدر رقموں کے سروں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد مساوات کی خیالی اصلوں کے زوجوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

۱۴۔ اگر پانچ درجی کے لئے اسٹرم کے باقیوں میں سے پہلے دو کی صدر رقموں کی علامتیں - + ہوں تو ثابت کرو کہ حقیقی اصلوں کی تعداد متعین ہو جاتی ہے

جواب:- صرف ایک اصل حقیقی۔

۱۵۔ اگر ھ اور ج دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہیں اور یہ کہ انہی شرطوں کے تحت پانچ درجی کی صرف ایک اصل حقیقی ہوتی ہے جب اس کو ثنائی سروں کے ماتحت لکھا جائے۔

(مسٹر ایم۔ رابرٹس، ڈبلن اگزامنیشن پیپرز ۱۸۸۲ء)

۱۶۔ اسٹرم کے مسئلہ کے استعمال میں اگر ایسا تفاعل ملجائے جس کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یا سب کی سب منفی تو ابتدائی مساوات کی مثبت اصلوں کی تعداد اور ان کے محل وقوع کی جانچ اسٹرم کے نچلے تفاعلوں کی مدد کے بغیر کیجا سکتی ہے۔ لیکن اگر ایسا تفاعل ملجائے جس کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں تو ابتدائی مساوات کی منفی اصلوں کی جانچ بھی اسی طریقہ پر کیجا سکتی ہے۔

۱۷۔ اگر کسی مساوات ف (لا) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل کی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں اس کو اسی طرح کے استدلال سے ثابت کیا جا سکتا ہے جو دفعہ ۹۶ میں استعمال کیا گیا ہے۔ ک ویں باقی کلی پر غور کرو اور فرض کرو کہ اسکا درجہ م ہے۔ کیا اور وہ م تفاعل جو اسکے بعد آتے ہیں ایک ایسا سلسلہ بناتے ہیں جس میں کوئی دو متصلہ تفاعل باہم معدوم نہیں ہو سکتے۔ جب، لا = - ∞ تو انکی علامتیں

باری باری سے مثبت اور منفی ہیں لیکن جب، لا = + ∞ تو یہ سب مثبت ہیں
اس لئے لا جب، - ∞ سے + ∞ تک جاتا ہے تو علامت کی م
تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی
سوائے اس صورت کے جبکہ، لا، مساوات ک‌ا = ۰ کی ایک اصل میں سے
گذرے۔ پس اس مساوات کی م حقیقی اصلیں ہیں۔

اب چونکہ لا کی وہ قیمت جو کسی تفاعل کو معدوم کرتی ہو دو متسلسلہ
تفاعلوں کو مختلف العلامت بناتی ہے اسلئے آسانی کے ساتھ نتیجہ نکلتا
ہے کہ سلسلہ کی کوئی مساوات بلحاظ اس تفاعل کے جو اس کے پیشتر ہے انتہائی
مساوات ہے۔

(21 **۱۸**۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک تفاعل
ف م (لا) کی حقیقی اصلیں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کی
اصلوں کی تعداد اور محل وقوع، ف م (لا) کے نیچے دیگر تفاعلوں کی امداد
کے بغیر متعین ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو۔ ف م (لا) = ۰ کی حقیقی اصلیں مقدار کی ترتیب میں
ع، ب، ....، ی، ط ہیں اور بقیہ اصلیں خیالی ہیں۔ لا جب - ∞ سے
ط سے کسی قدر چھوٹی قیمت تک بدلتا ہے تو تفاعل ف م (لا) اپنی
علامت نہیں بدل سکتا اور اس لئے ف (لا) = ۰ کی اصلوں کی جانچ کرنے میں
جو ان حدود کے درمیان واقع ہوں ف م (لا) کے بعد آنے والے
اسٹرم کے تفاعلوں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یہی بات اسوقت صادق
آتی ہے جبکہ لا، ط سے ذرا بڑی قیمت سے ی سے ذرا چھوٹی قیمت تک
گذرتا ہے۔ اور اسی طرح دوسرے وقفوں کے لئے بھی۔ پس اگر ہم وقفوں
(- ∞، ط)، (ط، ی)، .....، (ب، ع)، (ع، ∞) کی الگ الگ جانچ کریں تو ابتدائی
مساوات کی اصلوں کی تعداد جو ان میں سے ہر ایک میں واقع ہوتی ہے
اسٹرم کے نیچے کے تفاعلوں کی مدد کے بغیر متعین کی جا سکتی ہے۔

۱۹۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک میں خیالی

اصلیں ہوں تو ابتدائی مساوات میں کم از کم اتنی ہی تعداد خیالی اصلوں کی ہوگی۔
(مسٹر الیف۔ بیریسر)

اس کو مثال ماسبق سے اس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے کہ علامت کی تبدیلیوں کی بڑی سے بڑی تعداد کا امتحان کیا جائے جو ف م (لا) پر ختم ہونیوالے تفاعلوں کے سلسلہ میں کم ہو جاتی ہیں جبکہ لا، − ∞ سے + ∞ تک بدلتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جہانتک اس محدود سلسلہ کا تعلق ہے لا کے ف م (لا) = ۰ کی ہر اصل میں سے گذرنے پر علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہو سکتا ہے۔

۲۰ — مثال ۱۸ کا طریقہ دفعہ ۹۸ مثال ۱ میں استعمال کرو۔

آخری دو اسٹرم کے تفاعلوں کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۴} + ۳\,\text{لا}^{۳} + ۷\,\text{لا}^{۲} + ۱۰\,\text{لا} + ۱ ،$$

$$\text{ف}'(\text{لا}) \equiv ۴\,\text{لا}^{۳} + ۹\,\text{لا}^{۲} + ۱۴\,\text{لا} + ۱۰ ،$$

$$\text{ک}_{۱} \equiv -۲۹\,\text{لا}^{۲} - ۷۸\,\text{لا} + ۱۴$$

یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ $\text{ک}_{۱} = ۰$ کی اصلیں وقفوں (−۳، −۲) اور (۰، ۱) میں واقع ہوتی ہیں۔ مساوات ف (لا) = ۰ میں دو اصلیں خیالی ہیں کیونکہ $\text{ک}_{۱}$ میں $\text{لا}^{۲}$ کا سر منفی ہے۔ حقیقی اصلیں اگر کوئی ہوں منفی ہونی چاہئیں۔ مندرجۂ بالا تین تفاعل، وقفوں (− ∞، −۳) اور (−۲، ۰) میں اصلوں کے وجود اور محل وقوع کو متعین کرنیکے لئے کافی ہیں۔ یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی دو حقیقی اصلیں موخر الذکر وقفہ میں واقع ہوتی ہیں۔

بہت سی مثالوں میں اسٹرم کے آخری دو تفاعلوں کو اس طور پر نظر انداز کرنا ممکن ہوگا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو درجی تفاعل کی اصلوں کو ٹھیک طور پر معلوم کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ صرف وہ وقفے دریافت کر لئے جائیں جس میں وہ واقع ہوتی ہیں۔

(215)

۱۰۱ — جبری اور عددی مساواتیں — جبری اور عددی مساواتوں کے حل میں ایک اصولی فرق ہے۔ قبل الذکر میں نتیجہ کو خالص حرفی نوعیت کے عام ضابطہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ چونکہ ایک اصل کے لئے عام جملہ ہوتا ہے اس لئے بلا امتیاز تمام اصلوں کو تعبیر کرتا ہے۔ اِس جملہ کو ایسا ہونا چاہئے کہ اِس میں سروں کے جو تفاعل شامل ہوتے ہیں اِنکی بجائے اصلوں کے متناظر متشاکل تفاعلوں کو درج کیا جائے تو جذری علامات $\sqrt{}$، $\sqrt[3]{}$ سے تعبیر ہونیوالے اعمال قابل عمل ہوجائیں اور جب ان متشاکل تفاعلوں کے جذر الکعب اور جذر المربع نکالے جائیں تو اصلوں کا یہ جملہ ایک اصل میں تحویل ہو جائے، مختلف اصلیں جذر المربعوں $\pm\sqrt{}$، اور جذر الکعبوں $\sqrt[3]{}$، سہ$\sqrt[3]{}$، سہ$^2\sqrt[3]{}$ کے مختلف اجتماعوں سے حاصل ہونگی۔ اس بیان کی سادہ مثال دفعہ ۵۵ میں دو درجی کے لئے ملیگی۔ دفعات ۵۹ اور ۶۶ میں کعبی اور چار درجی کے لئے اسی قسم کی مثالیں درج ہیں۔ یہ بھی یاد رہے کہ وہ ضابطہ جو جبری مساوات کی اصل کو تعبیر کرتا ہے اسوقت بھی درست رہتا ہے جب مساوات کے سر خیالی مقداریں ہوں۔

(216)

عددی مساواتوں کی صورت میں اصلوں کو ایسے طریقوں سے جو ابھی بیان کئے جائینگے فرداً فرداً معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی ایک اصل کو تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر عموماً یہ ضروری ہے کہ وہ ایک معلومہ وقفہ میں واقع ہونی چاہئے جس میں کوئی دوسری حقیقی اصل شامل نہ ہو۔

عددی مساواتوں کی حقیقی اصلیں یا تو متوافق ہوسکتی ہیں یا متباین۔ پہلی جماعت میں اعداد صحیح کسرات، اور مختتم یا متوالی اعشاریہ جو کسرات میں تحویل ہوسکتی ہیں شامل ہیں۔ دوسری جماعت غیر مختتم اعشاریہ پر مشتمل ہے۔ پہلی جماعت کی اصلیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہوسکتی ہیں اور دوسری جماعت کی اصلوں کو صحت کے کسی درجہ تک تقریباً معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ایک ایسے مسئلہ سے ابتدا کرینگے جو پہلی جماعت کی اصلوں کی تعیین کو ایسی اصلوں کی تعیین میں تحویل کردیتا ہے جو صرف صحیح عدد ہیں۔

۱۰۲ — مسئلہ۔ جس مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک ہو اور دوسری رقموں کے سر صحیح اعداد ہوں اس میں کوئی ایسی متوافق اصل نہیں ہوسکتی جو صحیح عدد نہیں ہے۔

کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

کی ایک اصل $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ہے جو مختصر ترین شکل میں ایک کسر ہے۔ تب

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} + \text{ب}_1 \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-1} + \dots\dots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right) + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

اس کو $ب^{ن-۱}$ سے ضرب دو تو

$$-\frac{ا^{ن}}{ب} = ب_{۱} ا^{ن-۱} + ب_{۲} ا^{ن-۲} ب + \cdots + ب_{ن-۱} ا ب^{ن-۲} + ب_{ن} ب^{ن-۱}$$

اب یہ ظاہر ہے کہ $ا^{ن}$، ب سے تقسیم نہیں ہوتا اور مساوات کی بائیں جانب کی ہر رقم ایک صحیح عدد ہے یعنے مختصر ترین شکل کی ایک کسر ایک صحیح عدد کے مساوی ہے جو نا ممکن ہے۔ پس مساوات کی اصل $\frac{ا}{ب}$ نہیں ہو سکتی۔ اس لئے اسکی حقیقی اصلیں یا تو صحیح اعداد ہیں یا متباین مقداریں۔

ہر وہ مساوات جس کے سر محدود، کسری یا صحیح عدد ہوں، ایسی شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے جس میں پہلی رقم کا سر ایک اور دوسری ارقام کے سر صحیح عدد ہوں (دیکھو دفعہ ۳۱) پس معمولی استحالہ کی مدد سے متوافق اصلوں کی تعیین بالعموم صحیح عددی اصلوں کی تعیین میں تحویل کیجا سکتی ہے۔

اب ہم نیوٹن کا وہ طریق عمل بیان کرینگے جس سے کسی مساوات کی صحیح عددی اصلیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ اس مساوات کے سر سب کے سب صحیح عدد ہوں۔ اس طریقہ کو مقسوم علیہم کا طریقہ کہتے ہیں۔ (217)

۱۰۳ — نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ۔ فرض کرو کہ مساوات

$$ا_{۰} لا^{ن} + ا_{۱} لا^{ن-۱} + \cdots + ا_{ن-۱} لا + ا_{ن} = ۰ \quad \cdots\cdots (۱)$$

کی ایک صحیح اصل ھ ہے۔ اس کثیر الارقام کو لا - ھ سے تقسیم کرنیکے بعد فرض کرو کہ خارج قسمت

$$ب_{۰} لا^{ن-۱} + ب_{۱} لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۲} لا + ب_{ن-۱}$$

ہے جس میں $ب$، $ب_۱$، $ب_۲$ وغیرہ صریحاً صحیح عدد ہیں ۔

دفعہ ۸ کی طرح عمل کرنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :-

$$ا_۰ = ب_۰ ، ا_۱ = ب_۱ - ھ ب_۰ ، ا_۲ = ب_۲ - ھ ب_۱ ، \ldots$$

$$ا_{ن-۲} = ب_{ن-۲} - ھ ب_{ن-۳} ، ا_{ن-۱} = ب_{ن-۱} - ھ ب_{ن-۲} ، ا_ن = - ھ ب_{ن-۱}$$

ان میں سے آخری مساوات سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ $ا_ن$ ، $ھ$ سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے اور خارج قسمت $- ب_{ن-۱}$ ہے ۔ آخر سے دوسری مساوات جو شکل

$$ا_{ن-۱} + \frac{ا_ن}{ھ} = - ھ ب_{ن-۲}$$

میں رکھی جا سکتی ہے اس بات کو ثابت کرتی ہے کہ تذکرۂ صدر خارج قسمت اور آخر سے دوسرے سر کا مجموعہ پھر $ھ$ سے پورا پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور خارج قسمت $- ب_{ن-۲}$ ہے ۔ وقس علیٰ ہذا ۔

اس عمل کو جاری رکھا جائے تو آخری خارج قسمت جو اس طریقہ سے حاصل ہو گا $- ب_۰$ ہو گا جو $- ا_۰$ کے مساوی ہے ۔

$ا_ن$ کو پوری طرح تقسیم کرنیوالے جتنے صحیح عدد ہیں اُن میں سے جو اصلوں کے حدود کے اندر واقع ہوتے ہیں اُن سب کے ساتھ تذکرۂ بالا عمل کیا جائے تو انہیں سے جو اوپر کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں یعنے جن سے ہر قدم پر صحیح خارج قسمت حاصل ہوتا ہے اور آخری خارج قسمت $- ا_۰$ کے مساوی ہوتا ہے وہ مجوزہ مساوات کی اصلیں ہیں ۔ اور وہ جن سے دوران عمل میں کہیں کسری خارج قسمت حاصل ہوتا ہے اصلیں نہیں ہیں ۔

جب سر $ا_۰ = ۱$ تو دفعہ ماسبق کے مسئلہ سے ہم یہ جانتے ہیں کہ

اس طریقہ پر متعین کی ہوئی اصلیں سب کی سب مجوزہ مساوات کی متوافق اصلیں ہیں۔ اگر $\text{ا}_\text{ن} \neq$ ۱ تو بھی اس عمل سے مساوات کی صحیح اصلیں حاصل ہو جاتی ہیں لیکن اس طریقہ سے تمام متوافق اصلوں کو متعین کرنے کے لئے ہمیں مجوزہ مساوات کو پہلے ایسی مساوات میں تحویل کر لینا چاہئے جسمیں بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔ (218

۱۰۴ ۔ مقسوم علیہم کے طریقہ کا استعمال ۔ مقسوم علیہم کے طریقہ کو سہل ترین طرز پر استعمال کرنے کی غرض سے ہم سلسلہ اعمال کو شکل ذیل میں لکھتے ہیں جو دفعہ ۸ کے متشابہ ہے:۔

$$\text{ا}_\text{ن} \quad \text{ا}_{\text{ن}-۱} \quad \text{ا}_{\text{ن}-۲} \; \ldots\ldots \; \text{ا}_۲ \quad \text{ا}_۱ \quad \text{ا}_۰$$

$$-\text{ب}_{\text{ن}-۱} \quad -\text{ب}_{\text{ن}-۲} \; \ldots\ldots \; -\text{ب}_۲ \quad -\text{ب}_۱ \quad -\text{ب}$$

$$-\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-۲} \quad -\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-۳} \; \ldots\ldots \; -\text{ھ}\,\text{ب}_۱ \quad -\text{ھ}\,\text{ب} \;.$$

دوسری سطر کا پہلا عدد ($-\text{ب}_{\text{ن}-۱}$) $\text{ا}_\text{ن}$ کو ھ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوا۔ اس کو $\text{ا}_{\text{ن}-۱}$ میں جمع کرنا ہوگا تاکہ تیسری سطر کا پہلا عدد ($-\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-۲}$) حاصل ہو جائے۔ اسکو ھ سے تقسیم کرنا ہوگا تاکہ دوسری سطر کا دوسرا عدد ($-\text{ب}_{\text{ن}-۲}$) حاصل ہو۔ اسکو پھر $\text{ا}_{\text{ن}-۲}$ میں جمع کرنا ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ھ ایک اصل ہو تو دوسری سطر میں اس طریقہ سے حاصل ہونیوالا آخری عدد $-\text{ا}_۰$ ہوگا۔

جب اس طریقہ سے ہم یہ ثابت کرنے میں کامیاب ہو جائیں کہ عدد صحیح ھ ایک اصل ہے تو کسی اور مقسوم علیہ کے ساتھ پھر عمل کیا جا سکتا ہے

لیکن یہ عمل ابتدائی سروں l_n، l_{n-1}، .... پر نہیں بلکہ دوسری سطر کے
مقداروں پر انکی علامتیں بدلکر کرنا چاہئے کیونکہ یہ مقداریں خارج قسمت
کے سر ہیں جب ابتدائی کثیر الارقام کو لا - ھ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر
کسی مقسوم علیہ سے اثنائے عمل میں کسی منزل پر کسری نتیجہ حاصل ہو تو
اس کو فوراً خارج کر دینا چاہئے اور عمل کو روک دینا چاہئے۔
مقسوم علیہ ۱ اور -۱ جو صریحاً l_n کے ہمیشہ صحیح مقسوم علیہ ہیں
ان کو آزمائشی مقسوم علیہم کی تعداد میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ
مقسوم علیہم کے طریقہ کو استعمال کئے بغیر بہت آسانی کے ساتھ معمولی
اندراج سے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ آیا ان میں سے کوئی عدد مساوات کی
اصل ہے یا نہیں۔

(219)

مثالیں

۱- مساوات

لا^{4} - ۲ لا^{3} - ۱۳ لا^{2} + ۳۸ لا - ۲۴ = ۰

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔
رقموں کو گروہوں میں تقسیم کرنے سے (دفعہ ۸۷) بغیر کسی مشکل کے ہم یہ
دیکھتے ہیں کہ اس کی سب اصلیں -۵ اور +۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔
ذیل کے مقسوم علیہم ممکنہ اصلیں ہیں:-

-۴، -۳، -۲، ۲، ۳، ۴

ہم ۴ سے شروع کرتے ہیں:-

-۲۴   ۳۸   -۱۳   -۲   ۱

-۶   ۸

۳۲   -۵

عمل یہاں رک جاتا ہے کیونکہ -۵، ۴ سے پورا تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۴ اصل

نہیں ہے۔

اب ہم عدد ۳ کے ساتھ عمل کرتے ہیں:۔

۱ ۲- ۱۳- ۳۸ ۲۴-

$\frac{۱-}{۰}$ $\frac{۱-}{۳-}$ $\frac{۱۰}{۳-}$ $\frac{۸-}{۳۰}$

پس ۳ ایک اصل ہے ۔-۲ کے ساتھ عمل کرنے میں جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہم دوسری سطر کے سروں سے انکی علامتیں بدلکر فائدہ اٹھاتے ہیں:۔

۱ ۱ ۱۰- ۸

$\frac{۱-}{۰}$ $\frac{۳-}{۲-}$ $\frac{۴}{۶-}$

پس ۲ بھی ایک اصل ہے۔ پھر -۲ کے ساتھ عمل کرنے سے

۱ ۳ ۴-

$\frac{۲}{۵}$

عمل ۵ پر رک جاتا ہے کیونکہ یہ -۲ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ پس -۲ اصل نہیں ہے ۔-۳ بھی اصل نہیں ہے کیونکہ یہ -۴ کو تقسیم نہیں کرتا۔

[ہم -۳ کو پہلے ہی خارج کر سکتے تھے کیونکہ وہ تحویل شدہ کثیر الارقام کی مطلق رقم ۸ کو تقسیم نہیں کرتا۔ اِس بات کو پیش نظر رکھنے سے مقسوم علیہم کی تعداد گھٹانے میں اکثر فائدہ ہوتا ہے]

اب ہم آخری مقسوم علیہ -۴ کو لیتے ہیں:۔

۱ ۳ ۴-

$\frac{۱-}{۰}$ $\frac{۱}{۴}$

پس -۴ بھی اصل ہے۔

اِس لئے مساوات کی صحیح اصلیں ہیں ۳، ۲، -۴ اور عمل کی آخری

(220)

منزل سے یہ ظاہر ہے کہ جب ابتدائی کثیر الارقام کو ثنائی جملوں لا − ۴، لا − ۲، لا + ۴ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو نتیجہ لا − ۱ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے ایک بھی ایک اصل ہے۔ پس ابتدائی کثیر الارقام کو شکل

(لا − ۱) (لا − ۲) (لا − ۳) (لا + ۴)

میں رکھا جا سکتا ہے۔

۲۔ مساوات ۳ لا^{۴} − ۲۳ لا^{۳} + ۳۵ لا^{۲} + ۳۱ لا − ۳۰ = ۰

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

اسکی اصلیں − ۲ اور ۸ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ پس صرف مقسوم علیہم ۲، ۳، ۵، ۶ کو آزمانا ہوگا۔

ہم فوراً معلوم کر لیتے ہیں کہ ۶ اصل نہیں ہے۔

۵ کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

۳   − ۲۳   ۳۵   ۳۱   − ۳۰

− ۳   ۸   ۵   − ۶

۰   − ۱۵   ۴۰   ۲۵

پس ایک اصل ۵ ہے۔ ۳ کے لئے ہم معلوم کرتے ہیں

۳   − ۸   − ۵   ۶

− ۳   − ۱   ۲

۰   − ۹   − ۳

اس لئے ۳ بھی ایک اصل ہے۔ ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ ۲ اصل نہیں ہے۔

ابتدائی کثیر الارقام کو (لا − ۵) (لا − ۳) سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت آخری عمل کی رو سے ہے

۳ لا^{۲} + لا − ۲

جسکی ایک اصل − ۱ ہے۔ پس مجوزہ مساوات کی تمام صحیح اصلیں − ۱، ۳، ۵ ہیں۔

اس مساوات کی چوتھی اصل $\frac{2}{3}$ ہے جو متوافق اصل ہے اور صحیح عدد نہ ہونے کی وجہ سے اوپر کے عمل میں بیان نہیں کی گئی۔

۳۔ مساوات

$$لا^4 + لا^3 - 2 لا^2 + 4 لا - 24 = 0$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اصلوں کے حدود ہیں ۔ ۴، ۳

جواب: ۔ اصلیں ہیں ۔ ۳، ۲، $2 \pm \sqrt{-1}$

۴۔ مساوات

$$لا^4 - 2 لا^3 - 19 لا^2 + 68 لا - 60 = 0$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں ۔ ۶ اور ۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ۔

ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ ۲، ۳، ۔ ۵ اصلیں ہیں اور آخری تقسیم کے بعد جو جزو ضربی باقی رہ جاتا ہے وہ لا ۔ ۲ ہے ۔ پس ۲ دوہری اصل ہے ۔ چنانچہ کثیر الارقام

$$(لا - 2)^2 (لا - 3) (لا + 5)$$

کے معادل ہے ۔

دفعہ ۱۰۶ میں ضعفی اصلوں کی صورت پر مزید بحث کیجائیگی ۔

۱۰۵ ۔ مقسوم علیہم کی تعداد کو محدود کرنیکا طریقہ ۔ راست اندراج کے ذریعہ اس بات کا تعیُّن کرنا فی الواقعی ممکن ہے کہ آیا ان کے کوئی مقسوم علیہم مجوزہ مساوات کی اصلیں ہیں یا نہیں لیکن نیوٹن کے طریقہ کا ایک فائدہ یہ ہے کہ بعض مقسوم علیہم بہت تھوڑی محنت کے بعد خارج کئے جا سکتے ہیں جیسا کہ اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے ۔ اس طریقہ کا ایک دوسرا فائدہ بھی ہے جس کو ہم اب بیان کرینگے ۔ جب ان کے مقسوم علیہم کی تعداد اصلوں کے حدود کے اندر بڑی ہو تو اس طریقہ کو

(221

تفصیل کے ساتھ استعمال کرنے سے پیشتر ان مقسوم علیہم کی تعداد کو گھٹانا ضروری ہے جنکو آزمانے کی ضرورت ہے ۔ اس کو حسب ذیل طریقہ سے عمل میں لایا جا سکتا ہے :-

اگر ف (لا) = ۰ کی ایک صحیح اصل ھ ہے تو جیسا کہ اوپر بتایا گیا ف (لا)، لا - ھ سے پورا تقسیم ہوجاتا ہے اور خارج قسمت کے سر صحیح اعداد ملتے ہیں ۔ اس لئے اگر ہم لا کو کوئی صحیح عددی قیمت دیں اور ف (لا) کی متناظر قیمت کو لا - ھ کی متناظر قیمت سے تقسیم کریں تو خارج قسمت ایک صحیح عدد ہونا چاہئے ۔ سہولت کی خاطر ہم سادہ ترین صحیح اعداد ۱ اور -۱ لیتے ہیں اور کسی مقسوم علیہ ھ کو آزمانے سے پیشتر ہم اس پر یہ شرط عائد کر دیتے ہیں کہ ف(۱)، ۱ - ھ سے تقسیم ہوجائے (یا علامت کو بدل دینے سے، ھ - ۱ سے) اور ف (-۱)، -۱ - ھ سے تقسیم پذیر ہو جائے (یا، علامت کو بدل دینے سے، ۱ + ھ سے) ۔

اس نتیجہ کو استعمال کرتے وقت سب سے پہلے ف (۱) اور ف (-۱) کو محسوب کرنے میں سہولت ہوگی ۔ اگر ان میں سے کوئی ایک معدوم ہو جائے تو متناظر صحیح عدد ایک اصل ہے اور پھر ہم اس تحویل شدہ کثیر الارقام پر عمل جاری کریں گے جس کے سر اس نتیجہ کو معلوم کرنے کے عمل میں حاصل ہوتے ہیں جو زیر بحث صحیح عدد کو درج کرنے سے ملتا ہے ۔

مثالیں

۱ - $لا^۵ - ۲۳ لا^۴ + ۱۶۰ لا^۳ - ۲۸۱ لا^۲ - ۲۵۰ لا - ۴۴۰ = ۰$

اصلیں -۱ اور ۲۴ کے درمیان واقع ہوئی ہیں ۔

حسب ذیل مقسوم علیہم حاصل ہوتے ہیں :-

۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے ہیں

ف (۱) = - ۸۴۰ ، ف (-۱) = - ۶۴۸

اس لئے ہم وہ تمام مقسوم علیہم خارج کردیتے ہیں جو، بقدر ایک کے گھٹ جانیکے بعد، ۸۴۰ کو تقسیم نہیں کرتے، اور جو، بقدر ایک کے بڑھ جانیکے بعد ۶۴۸ کو تقسیم نہیں کرتے۔ پہلی شرط ۱۰ اور ۲۰ کو خارج کرتی ہے اور دوسری شرط ۴ اور ۲۲ کو۔ باقی اعداد ۲، ۵، ۸، ۱۱ پر مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ۵، ۸، ۱۱ اصلیں ہیں اور حاصل خارج قسمت لا^{۲} + لا + ۱ ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام جملہ

(لا - ۵) (لا - ۸) (لا - ۱۱) (لا^{۲} + لا + ۱)

کے معادل ہے۔

۲ — لا^{۵} - ۲۹ لا^{۴} - ۳۱ لا^{۳} + ۳۱ لا^{۲} - ۳۲ لا + ۶۰ = ۰

اصلیں -۳ اور ۳۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

مقسوم علیہم ہیں:—

-۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰

ف (۱) = ۰، اسلئے ایک اصل ۱ ہے۔

ف (-۱) = ۱۲۴۔ اوپر کی شرط -۲، ۳، ۳۰ کے سوا سب کو خارج کردیتی ہے آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوجائیگا کہ -۲ اور ۳۰ اصلیں ہیں اور آخری خارج قسمت لا^{۲} + ۱ ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام (لا - ۱) (لا - ۳۰) (لا + ۲) (لا^{۲} + ۱) کے معادل ہے۔

۱۰۶ — ضعفی اصلوں کی تعیین۔ مقسوم علیہم کا طریقہ ضعفی اصلونکی تعیین کرتا ہے جبکہ وہ متوافق ہوں۔ اس طریقہ کو استعمال کرنے میں جب ان کا کوئی مقسوم علیہ جس کا اصل ہونا معلوم ہوچکا ہے تحویل شدہ کثیر الارقام کی رقم مطلق کا مقسوم علیہ ہو تو ہمیں اس بات کا امتحان کرلینا چاہئیے کہ وہ موخرالذکر کی اصل بھی ہے یا نہیں۔ اگر وہ تحویل شدہ کثیر الارقام کی اصل ہے تو ایسی صورت میں وہ مجوزہ مساوات کی دوہری اصل ہے۔ اگر وہ دوسرے تحویل شدہ

کثیر الارقام کی اصل بھی ہو تو وہ مجوزہ مساوات کی تہری اصل ہے اور علیٰ ہذا القیاس جب کبھی کسی مساوات میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی صرف ایک ضعفی اصل ہو تو اس کو اس طریقہ پر معلوم کیا جا سکتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں ف (لا) اور ف َ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم (لا - عہ)^ر-۱ کی شکل کا ہوگا اور اگر عہ متباین ہو تو اس کے سر متوافق نہیں ہو سکتے۔

(223) تیسرے، چوتھے اور پانچویں درجوں کی مساواتوں کی ضعفی اصلیں ایسی مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کے عمل کی مدد کے بغیر پوری طرح معلوم کیجا سکتی ہیں جیساکہ ذیل کے مشاہدات سے واضح ہو جائیگا:-

(۱) کعبی - اس صورت میں ضعفی اصلوں کو متوافق ہونا چاہئے کیونکہ اسکا درجہ اتنا بڑا نہیں ہے کہ دو جدا جدا اصلیں تکرار پا سکیں۔

(۲) چار درجی - اس صورت میں یا تو ضعفی اصلیں متوافق ہیں یا یہ تفاعل ایک کامل مربع ہے - کیونکہ چار درجی کی وہ شکل جس میں دو جدا جدا اصلیں تکرار پا سکتی ہیں صرف یہ ہے -

(لا - عہ)^۲ (لا - بہ)^۲

یعنے ایک دو درجی کا مربع - چار درجی کی اصلیں متباین ہو سکتی ہیں۔ اسلئے اگر یہ معلوم ہو جائے کہ چار درجی کی اصلیں متوافق نہیں ہیں تو ہمیں یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا وہ کامل مربع ہے تاکہ مساوی متباین اصلوں کا تعین ہو سکے۔

(۳) پانچ درجی - اس صورت میں یا تو ضعفی اصلیں متوافق ہیں یا یہ تفاعل دو جملوں کا حاصل ضرب ہے، ایک خطی متوافق جزو ضربی اور دوسرا ایک دو درجی کا مربع - کیونکہ دو مختلف اصلوں کے تکرار پا سکنے کے لئے تفاعل کو شکلوں

(لا - عہ)^۲ (لا - بہ)^۲ (لا - جہ)^۱ (لا - عہ)^۲ (لا - بہ)^۳

میں سے کوئی نہ کوئی شکل اختیار کرنی چاہئے - موخر الذکر شکل میں اصلیں متباین نہیں ہو سکتیں - لیکن قبل الذکر ایسی صورت کا جواب ہو سکتی ہے

جس میں ایک متوافق جزو ضربی ایک دو درجی کے مربع سے مضروب ہو
جسکی اصلیں متباین ہیں۔ اس طرح اگر پانچ درجی میں متوافق اصلوں کا
غیر موجود ہونا معلوم ہو جائے تو اسکی اصلیں ضعفی نہیں ہو سکتیں۔ اگر
اس میں صرف ایک متوافق اصل پائی جائے تو اس بات کا امتحان
کرلینا چاہئے کہ آیا باقی ماندہ جزو ضربی کامل مربع ہے۔ اگر اسمیں ایک سے
زیادہ متوافق اصلیں ہوں تو ضعفی اصلیں متوافق اصلوں میں ملینگی۔

224

مثالیں

۱۔　۲ لا^{3} − ۳۱ لا^{2} + ۱۱۲ لا + ۶۴ = ۰

کی تمام متوافق اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود −۱ ، ۱۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ مقسوم علیہم ۲ ، ۴ ، ۸
ہیں۔

۲	۳۱-	۱۱۲	۶۴
۲-	۱۵	۸	
۰	۱۶-	۱۲۰	

اسلئے ۸ ایک اصل ہے۔ اب تحویل شدہ مساوات پر عمل کرو

۲	۱۵-	۸-
۲-	۱-	
۰	۱۶-	

۸ پھر ایک اصل ہے اور باقی ماندہ جزو ۲ لا + ۱ ہے۔

جواب :۔ ف (لا) ≡ (۲ لا + ۱) (لا − ۸)^{2}

۲۔　لا^{4} − لا^{3} − ۳۰ لا^{2} − ۷۶ لا − ۵۶ = ۰

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود −۶ ، ۱۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ (دفعہ ۷،۸ مثال ۱۰
کا طریقہ استعمال کرو)

جواب :- $ف(لا) \equiv (لا+۲)^۲ (لا-۷)$

۳- $۹لا^۴ - ۱۲لا^۳ - ۱۷لا^۲ - ۴۰لا + ۱۶ = ۰$

کی متوافق اور ضعفی اصلیں دریافت کرو۔

اصلیں حدود -۲، ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

مساوات جس شکل میں ہے اس میں صحیح اصلیں نہیں ہیں۔ لیکن پھر بھی اسکی اصل متوافق ہو سکتی ہے۔ اس کو جانچنے کے لئے اصلوں کو ۳ سے ضرب دو تاکہ $لا^۴$ کا سر ایک ہو جائے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$لا^۴ - ۴لا^۳ - ۱۷لا^۲ - ۱۲۰لا + ۱۴۴ = ۰$$

اب اصلیں حدود -۶، ۱۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

اسکی ایک دوہری اصل -۴ ہے اور تفاعل $(لا^۲ - ۱۲لا + ۹)(لا + ۴)^۲$ کے معادل ہے۔ اس لئے ابتدائی مساوات

$$(لا^۲ - ۴لا + ۱)(۳لا + ۴)^۲ = ۰$$

کے مماثل ہے۔

۴- $لا^۴ + ۱۲لا^۳ + ۳۲لا^۲ - ۲۴لا + ۴ = ۰$

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

(225)

اصلیں -۱۲ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اسلئے قابل امتحان مقسوم علیہم صرف -۴، -۲، -۱ ہیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مساوات کی کوئی اصل متوافق نہیں ہے۔ اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آیا دیا ہوا تفاعل کامل مربع ہے تفاعل کا جذر المربع نکالنے سے یا مثال ۳ صفحہ ۳۱۸ کی شرطوں کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہو سکتا ہے۔ چنانچہ یہ $لا^۲ + ۶لا - ۲$ کا مربع ہے (مثال ۱ صفحہ ۱[illegible]۴)۔ پس دی ہوئی مساوات مساوی اصلوں کے دو زوج رکھتی ہے اور دونوں متباین ہیں۔

۵- $ف(لا) \equiv لا^۵ - لا^۴ - ۱۲لا^۳ + ۸لا^۲ + ۲۸لا + ۱۲ = ۰$

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلوں کے حدود -۴، ۴ ہیں۔

مساوات کی ایک اصل −۳ ہے اور تحویل شدہ مساوات ہے

$$لا^{۴} - ۴ لا^{۳} + ۸ لا + ۴ = ۰$$

اور کوئی دوسری متوافق اصل موجود نہیں ہے۔ اسلئے ضعفی اصلوں کا امکان صرف اِس صورت میں ہے جبکہ یہ بعد کا تفاعل کامل مربع ہو۔ چنانچہ یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ وہ کامل مربع ہے اور

$$ف(لا) \equiv (لا^{۲} - ۲لا - ۲)^{۲}(لا + ۳)$$

۶ — $ف(لا) \equiv لا^{۵} - ۸ لا^{۴} + ۲۲ لا^{۳} - ۲۶ لا^{۲} + ۲۱ لا - ۱۸ = ۰$

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- $ف(لا) \equiv (لا^{۲} + ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)^{۲}$

۷ — ذیل کی مساوات میں صرف دو مختلف اصلیں ہیں۔ اِنکو معلوم کرو۔

$$لا^{۵} - ۱۳ لا^{۴} + ۶۷ لا^{۳} - ۱۷۱ لا^{۲} + ۲۱۶ لا - ۱۰۸ = ۰$$

عموماً یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک صحیح اصل ھ دو مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں $ھ^{۲}$ جزوِ ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہیئے اور آخر سے دوسرے سر میں ھ۔ اگر اصل تین مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں $ھ^{۳}$، آخر سے دوسرے سر میں $ھ^{۲}$، اور آخر سے تیسرے سر میں ھ جزوِ ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہیئے۔ یہاں آخری سر $= ۲^{۲} \times ۳^{۳}$۔ پس اگر نہ تو −۱ اور نہ ۱ اصل ہو تو اصلیں ۲ اور ۳ ہونی چاہئیں۔ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ ہو سکتی ہے کہ یہ دونوں فی الحقیقت اصلیں ہیں۔

۸ — مساوات

$$۸۰۰ لا^{۴} - ۱۰۲ لا^{۲} - لا + ۳ = ۰$$

میں مساوی اصلیں ہیں اِن کو معلوم کرو۔

اس مثال میں مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے بیشتر اصلوں کو اِن کے متکافیوں میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوگی۔

جواب :- $ف(لا) \equiv (۱۰لا - ۳)(۵لا - ۱)(۴لا + ۱)^{۲}$

(226)

۱۰۷ — نیوٹن کا تقرب کا طریقہ ۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ مساواتوں کی متوافق اصلیں کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں اب ہم متباین اصلوں کی تقریبی قیمتیں حاصل کرنے کے بعض طریقے بیان کرتے ہیں ۔ تقرب کا وہ طریقہ جو عام طور پر نیوٹن[1] سے منسوب کیا جاتا ہے اور جو اس دفعہ کا موضوع ہے اس لحاظ سے قابل قدر ہے کہ اس کو ماورائی تفاعلوں پر مشتمل عددی مساواتوں میں اور ان مساواتوں میں جنمیں صرف جبری تفاعل شامل ہوتے ہیں یکساں طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ اگرچہ موخرالذکر جماعت کے تفاعلوں کی صورت میں عملی مقاصد کے مدنظر ہارنر کے طریقہ کو نیوٹن کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے تاہم اصول میں دونوں طریقے بڑی حد تک مماثل ہیں ۔ ہارنر کا طریقہ جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دفعات آئندہ میں واضح کیا جائیگا ۔

تقرب کے تمام طریقوں میں جس اصل کو ہم تلاش کرتے ہیں اسکی متعلق یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ وہ دوسری اصلوں سے جدا کر لیگئی ہے اور تنگ حدود کے درمیان معلومہ وقفہ کے اندر واقع ہے ۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ف (لا) = ۰ ہے اور قیمت ا معلوم ہے جو مساوات کی ایک اصل سے بقدر ایک چھوٹی مقدار ھ کے فرق رکھتی ہے ۔ اب چونکہ مساوات کی اصل ا + ھ ہے اسلئے ف (ا + ھ) = ۰ یعنی

$$\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}'(\text{ا})\,\text{ھ} + \frac{\text{ف}''(\text{ا})}{۱\times۲}\,\text{ھ}^{۲} + \ldots\ldots = ۰$$

اب چونکہ ھ چھوٹا ہے اسلئے ھ کی ایک سے بڑی تمام قوتوں کو نظرانداز کردینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

---

[1] دیکھو نوٹ (ب) کتاب کے آخری حصہ میں ۔

ف (ا) + فَ (ا) ھ = ۰

جس سے

$$ھ = - \frac{ف (ا)}{فَ (ا)}$$

یعنے مطلوبہ اصل کی پہلی تقریبی قیمت ہے

$$ا - \frac{ف (ا)}{فَ (ا)}$$

اس قیمت کو ب سے تعبیر کرو اور پھر وہی عمل جاری کرو تو قریب تر تقریبی قیمت

$$ب - \frac{ف (ب)}{فَ (ب)}$$

حاصل ہوگی۔
اس عمل کو دہرانے سے صحت کے کسی درجہ تک تقریبی قیمت معلوم کیجا سکتی ہے۔

مثال

مساوات $لا^{۳} - ۲ لا - ۵ = ۰$
کی مثبت اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے (مثال ا دفعہ ۹۶)۔ حدود کو تنگ کرنے سے اصل کا ۲ اور ۲٫۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ہم ۲٫۱ کو وہ مقدار لیتے ہیں جو ا سے تعبیر کیجاتی ہے۔ یہ مقدار اصلی قیمت ا + ھ سے ۰٫۱ سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتی۔ آسانی کے ساتھ ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{ف (ا)}{فَ (ا)} = \frac{ف (۲٫۱)}{فَ (۲٫۱)} = \frac{۰٫۰۶۱}{۱۱٫۲۳} = ۰٫۰۰۵۴۳ \cdots$$

(227)

اسلئے پہلا تقرب ہے

۲٬۱ - ۰٬۰۰۵۴۳ = ۲٬۰۹۴۶

اسکو ب قرار دینے سے اور کسر $\frac{ف(ب)}{فَ(ب)}$ کو محسوب کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ب - \frac{ف(ب)}{فَ(ب)} = ۲٬۰۹۴۵۵۱۴۸$$

جو دوسرا تقرب ہے۔ وقس علیٰ ہذا۔

نیوٹن کے طریقہ میں عام طور پر تقرب کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے لیکن جس اصل کو ہم تلاش کر رہے ہیں اس کے ساتھ ہی جب دوسری اصل تقریباً اسکے مساوی ہوتی ہے تو کسر $\frac{ف(ا)}{فَ(ا)}$ کا چھوٹا ہونا ضروری نہیں کیونکہ تقریباً مساوی اصلوں میں سے کسی ایک کی قیمت، فَ(لا) کو ایک چھوٹی مقدار میں تحویل کر دیتی ہے۔ ایسی صورت میں خاص خاص پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے اس طریقہ کی تفصیلی بحث میں ہم پڑنا نہیں چاہتے اس وجہ سے کہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کا طریقہ کہیں زیادہ مفید و کارآمد ہے جو اب بیان کیا جائیگا۔

۱۰۸ — عددی مساواتوں کو حل کرنیکے لئے ہارنر کا طریقہ۔

اس طریقہ سے متوافق اور متباین دونوں اصلیں معلوم ہوسکتی ہیں۔ ایسی اصل کو ہندسہ بہ ہندسہ دریافت کیا جاتا ہے، پہلے اصل کا صحیح حصہ (اگر کوئی ہو) اور پھر اعشاری حصہ حاصل کرتے ہیں یہانتک کہ اصل اگر متوافق ہو تو پوری طرح اور اگر متباین ہو تو اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک معلوم ہو جائے۔ یہ عمل جذر المربع اور جذر الکعب نکالنے کے عمل کے متشابہ ہے جو فی الحقیقت موجودہ طریقہ سے دو درجی اور کعبی مساواتوں کے عام حل معلوم کرنے کی خاص صورتیں ہیں۔

ہارنر کے طریقہ کا خاص اصول یہ ہے کہ دی ہوئی مساوات کی

اصلوں کو دفعہ ۳۴۳ میں بیان کردہ طریقہ کی بموجب بقدر معلومہ مقدار و نیچے متواتر گھٹایا جاتا ہے ۔ اس طریقہ کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ متواتر استحالات مختصر حسابی شکل میں پیش نظر ہو جاتے ہیں اور اصل ایک مسلسل عمل سے اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک صحیح صحیح حاصل ہو جاتی ہے ۔

اصلوں کو گھٹانے کا اصول اس دفعہ میں سادہ مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جائیگا اور دفعات آئندہ میں چند اور اصول بیان کئے جائینگے جنکی مدد سے اس طریقہ کے عملی استعمال میں بہت کچھ سہولت پیدا ہو سکتی ہے ۔

مثالیں

۱ ـ مساوات

۲ لا^3 − ۸۵ لا^2 − ۸۵ لا − ۸۷ = ۰

کی مثبت اصلیں معلوم کرو ۔

جب کوئی عددی مساوات حل کرنے کے لئے تجویز ہو تو پہلا کام یہ ہوگا کہ اصل کا پہلا عدد معلوم کیا جائے ۔ چند آزمائشوں سے یہ عدد معلوم ہو سکتا ہے اگرچہ بعض صورتوں میں اصلوں کو جدا کرنے کے وہ طریقے استعمال کرنے ہونگے جو دسویں باب میں بیان کئے گئے ہیں ۔ مثال بالا میں صرف ایک اصل مثبت ہو سکتی ہے اور یہ ۴۰ اور ۵۰ کے درمیان واقع ہے ۔ پس اصل کا پہلا عدد ۴ ہے ۔ اب ہم اصلوں کو بقدر ۴۰ کے گھٹاتے ہیں ۔ استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱۰ کے درمیان ہوگی ۔ امتحان کرنے سے اس کا ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے ۔ اب ہم استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹاتے ہیں جس کا اثر یہ ہوگا کہ مجوزہ مساوات کی اصلیں بقدر ۴۳ کے گھٹ جائینگی ۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱ کے درمیان ہوگی ۔ اس آخری مساوات کی اصلوں کو بقدر ۵ ر کے گھٹانے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسکی مطلق رقم صفر ہو جاتی ہے یعنی مجوزہ مساوات کی

اصلوں کو بقدر ۵،۳۴ کے گھٹانے سے اسکی مطلق رقم صفر میں تحویل ہوتی ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دی ہوئی مساوات کی ایک اصل ۵،۳۴ ہے۔ حسابی اعمال کا سلسلہ ذیل میں ظاہر کیا جاتا ہے :-

(۵،۳۴				
	۸۷-	۸۵-	۸۵-	۲
	۱۱۴۰۰-	۲۰۰-	۸۰	
	۱۱۴۸۷-	۲۸۵-	۵-	
	۹۵۹۴	۳۰۰۰	۸۰	
	۱۸۹۳-	۲۷۱۵	۷۵	
	۱۸۹۳	۴۸۳	۸۰	
	۰	۳۱۹۸	۱۵۵	
		۵۰۱	۶	
		۳۶۹۹	۱۶۱	
		۸۷	۶	
		۳۷۸۶	۱۶۷	
			۶	
			۱۷۳	
			۱	
			۱۷۴	

شکستہ خط ہر استحالہ کے اختتام کی علامت ہے اور جلی ہندسوں میں لکھے ہوئے اعداد متواتر استحالہ شدہ مساواتوں کے سر ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ مثلاً

$$۲لا^{۳} + ۱۵۵ لا^{۲} + ۲۷۱۵ لا - ۱۱۴۸۷ = ۰$$

(229) وہ مساوات ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴۰ کے چھوٹی ہیں اور جس کی مثبت اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اگر دوسری استحالہ شدہ مساوات کی بالکل ٹھیک اصل ۵، نہ ہوتی بلکہ (فرض کرو) ۵، اور ۶، کے درمیان واقع ہوتی تو مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے تین ہندسے

۵ء ۴۳ ہوتے اور چوتھا ہندسہ معلوم کرنیکے لئے اصلوں کو بقدر ۵ء کے گھٹانا پڑتا اور علیٰ ہذا القیاس۔

۲— مساوات

۴ لا^{۳} − ۱۳ لا^{۲} − ۳۱ لا − ۲۷۵ = ۰

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

ہم پہلے حسابی عمل لکھ لیتے ہیں اور پھر اِسکے متعلق کچھ بحث کرینگے۔

(۶ء۲۵	−۲۷۵	−۳۱	−۱۳	۴
	۲۱۰	۶۶	۲۴	
	−۶۵	۳۵	۱۱	
	۵۱ء۳۹۲	۲۱۰	۲۴	
	−۱۳ء۶۰۸	۲۴۵	۳۵	
	۱۳ء۶۰۸	۱۱ء۹۶	۲۴	
	۰	۲۵۶ء۹۶	۵۹	
		۱۲ء۱۲	۸ء	
		۲۶۹ء۰۸	۵۹ء۸	
		۳ء۰۸	۸ء	
		۲۷۲ء۱۶	۶۰ء۶	
			۸ء	
			۶۱ء۴	
			۲ء	
			۶۱ء۶	

آزمائش سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مجوزہ مساوات کی مثبت اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اس لئے اصل کا پہلا ہندسہ ۶ ہے۔ اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹاؤ۔ متحلہ شدہ مساوات

لا^{۳} + ۵۹ لا^{۲} + ۲۴۵ لا − ۶۵ = ۰

کی اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ امتحان کرنے سے اسکا ۲، اور ۳، کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلئے مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے دو ہندسے ۶،۲ ہیں۔ پھر اصلوں کو بقدر ۲، کے گھٹاؤ تو استحالہ شدہ مساوات کی اصل ۰.۵، ہوگی۔ پس مجوزہ مساوات کی مطلوبہ اصل ۶،۲۵ ہے۔

عمل میں سہولت و آسانی پیدا ہوگی اگر علامت اعشاریہ سے اجتناب کیا جائے چنانچہ اس سے بچنے کی ترکیب یہ ہے:۔ جب اصل کا اعشاریہ حصہ (فرض کرو ... ج ب ا د) نمودار ہونیکو ہو تو متناظر استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دیدو یعنے پہلی انتصابی قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب ایک صفر لگاؤ، دوسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب دو صفر، تیسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب تین صفر، اور علیٰ ہذا القیاس اگر قطاریں تعداد میں زیادہ ہوں (اور یہ بات فی الواقعی ہوگی جب دی ہوئی مساوات تیسرے درجہ سے بڑے درجہ کی ہو) اب استحالہ شدہ مساوات کی اصل ... ج ب ا د نہیں بلکہ ... ج ب، ا د ہوگی۔ اصلوں کو بقدر ا کے گھٹاؤ تو استحالہ شدہ مساوات کی اصل ... ج ب، د ہوگی۔ پھر اس مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دو تو اصل ہو جائیگی ... ج د ب اور پھر وہی عمل جاری کرو۔ اس اصول کو واضح کرنیکی خاطر ہم اوپر کے حسابی عمل کو علامات اعشاریہ حذف کر کے دہراتے ہیں:۔ (230)

(۶،۲۵	۲۷۵ -	۳۱ -	۱۳ -	۴
	۲۱۰	۶۶	۲۴	
	۶۵۰۰۰ -	۳۵	۱۱	
	۵۱۳۹۲	۲۱۰	۲۴	
	۱۳۶۰۸۰۰۰ -	۲۴۵۰۰	۳۵	
	۱۳۶۰۸۰۰۰	۱۱۹۶	۲۴	
	۰	۲۵۶۹۶	۵۹۰	
		۱۲۱۲	۸	
		۲۶۹۰۸۰۰	۵۹۸	
		۳۰۸۰۰	۸	
		۲۷۲۱۶۰۰	۶۰۶	
			۸	
			۶۱۴۰	
			۲۰	
			۶۱۶۰	

آئندہ تمام مثالوں میں یہ اختصار اختیار کیا جائیگا۔

۳ — مساوات

$$20\,\text{لا}^3 - 121\,\text{لا}^2 - 121\,\text{لا} - 141 = 0$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

اصل کا ۷ اور ۸ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہوجاتا ہے۔ اسلئے اس کی شکل ہے .... ب ا، ۷۔ اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹانے اور ۱۰ سے ضرب دینے سے حاصل ہونیوالی مساوات ہے

$$20\,\text{لا}^3 + 2990\,\text{لا}^2 + 112500\,\text{لا} - 57000 = 0$$

اسکی مثبت اصل .... ب ، ا ہے اور چونکہ یہ اصل صریحاً صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اسلئے ا = ۰ اور اسلئے اصل کے اعشاری حصہ میں ہم پہلا ہندسہ صفر لکھتے ہیں اور پھر دوسرے استحالہ کو عمل میں لانے سے بیشتر اصلوں کو ۱۰ ضرب دیتے ہیں۔ اس طور پر استحالہ شدہ مساوات کی اصل کا ۵ کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ جواب :— ۷، ۰۵

اوپر کی مثالوں میں اصل بہت جلد ختم ہوگئی ہے یعنے صرف تین ہندسوں کے بعد۔ لیکن جب عمل حساب طول طویل ہو اور متواتر آنیوالے ہندسوں کو اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا ضروری ہو تو یہ کام بہت محنت طلب ہوجائیگا۔ اس محنت سے تھوڑی بہت نجات ملسکتی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے ظاہر ہوگا۔ ہارنر کے طریقہ کے اہم ترین عملی فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اصل کے دوسرے یا تیسرے (بعض اوقات صرف پہلے) ہندسہ کے بعد خود استحالہ شدہ مساوات سے صرف آزمائش کے ذریعہ بعد کے ہندسہ کا علم ہوجاتا ہے۔ اس اصول کو اب واضح کیا جائیگا۔

۱۰۹ — آزمائشی مقسوم علیہ کا اصول — دفعہ ۱۰۷ میں ہم نے (231)

یہ دیکھا ہے کہ جب کسی مساوات کو لا کی بجائے ا + ھ درج کرکے مستحیل کیا جاتا ہے جہاں ا ایسا عدد ہے جو صحیح اصل سے بقدر ھ کے (جو بلحاظ ا کے چھوٹا ہے) فرق رکھتا ہے تو ھ کی تقریبی قیمت

ف (ا) کو فَ (ا) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اب ہارنر کے طریقہ میں متواتر آنیوالی استحالہ شدہ مساواتیں اُس قسم کے استحالوں کا نتیجہ ہوتی ہیں جنہیں آخری سر ف (ا) اور آخر سے دوسرا سر فَ (ا) ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۳)۔ پس عمل کی دو یا تین منزلیں طے ہونیکے بعد جب اصل کا باقی حصہ معلوم شدہ حصہ کے ساتھ چھوٹی نسبت رکھے تو آخری استحالہ شدہ مساوات کے آخری سر کو آخر سے دوسرے سر سے تقسیم کرنے سے اصل کے مزید دو یا تین ہندسے صحیح طور پر حاصل ہونے کی ہم امید کر سکتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو ہارنر کے طریقہ میں عمل کے کسی منزل پر اصل کا مزید تقرب حاصل کرنے کی خاطر نیوٹن کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ ہارنر کے طریقہ میں یہ اصول اسوقت استعمال کیا جاتا ہے جب اصل کے معلوم شدہ ہندسوں کے بعد آنے والے ہندسہ کا پتہ لگانا مقصود ہو۔ ہر استحالہ شدہ مساوات کے آخر سے دوسرے سر کو ہم **آزمایشی مقسوم علیہ** کے نام سے موسوم کرینگے۔ مثلاً دفعہ ماسبق کی دوسری مثال میں عدد ۵ کا پتہ آزمایشی مقسوم علیہ ۲۶۹۰۸۰۰ سے صحیح طور پر لگ جاتا ہے۔ اس مثال میں پہلی استحالہ شدہ مساوات کے آزمایشی مقسوم علیہ سے اصل کا دوسرا ہندسہ بھی ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے اگرچیکہ بالعموم ایسا نہیں ہوتا۔ طالب علم کو استحالہ شدہ مساوات کے صدر (Leading) سروں کے ممکن اثر کا اندازہ لگانا ہوگا۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ ان رقموں کا اثر کم سے کم تر ہوتا جائیگا جیسے جیسے اصل کے ہندسے یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے۔

مثالیں

۱۔ مساوات　$لا^3 + لا^2 + لا - ۱۰۰ = ۰$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے کہ اصل ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ ہم عمل حساب لکھ لیتے ہیں اور پھر اس پر تنقید کرینگے:۔

(282)

(۴٫۲۶۴۴			
۱۰۰-	۱	۱	۱
۸۴	۲۰	۴	
۱۶۰۰۰-	۲۱	۵	
۱۱۹۲۸	۳۶	۴	
۴۰۷۲۰۰۰-	۵۷۰۰	۹	
۳۷۸۸۳۷۶	۲۶۴	۴	
۲۸۳۶۲۴۰۰۰-	۵۹۶۴	۱۳۰	
۲۵۶۰۷۱۷۴۴	۲۶۸	۲	
۲۷۵۵۲۲۵۶-	۶۲۳۲۰۰	۱۳۲	
	۸۱۹۶	۲	
	۶۳۱۳۹۶	۱۳۴	
	۸۲۳۲	۲	
	۶۳۹۶۲۸۰۰	۱۳۶۰	
	۵۵۱۳۶	۶	
	۶۴۰۱۷۹۳۶	۱۳۶۶	
	۵۵۱۵۲	۶	
	۶۴۰۷۳۰۸۸	۱۳۷۲	
		۶	
		۱۳۷۸۰	
		۴	
		۱۳۷۸۴	
		۴	
		۱۳۷۸۸	
		۴	
		۱۳۷۹۲	

پہلے اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹاؤ۔ اب چونکہ اعشاری حصہ ظاہر ہونے کو ہے

اس لئے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کو دفعہ ۱۰۸ مثال ۲ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب صفر لگاؤ۔ سہر ۱۳۰، ۵۷۰۰ کے مقابلہ میں چھوٹا ہے اس لئے ہم یہ امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے اصل کے دوسرے ہندسہ کا پتہ لگ سکتا ہے۔ اس بات کا خیال رہے کہ **ہر صورت میں جس ہندسہ کو اصل کے حصہ کے طور پر ہم اختیار کر رہے ہونگے وہ ایسا بڑے سے بڑا عدد ہونا چاہیئے جو استحالہ کے عمل میں مطلق رقم کی علامت کو تبدیل نہیں کرتا**۔ یہاں ایسا عدد ۲ ہے۔ استحالہ شدہ مساوات

$$لا^{۴} + ۱۳۰ لا^{۲} + ۵۷۰۰ لا - ۱۶۰۰۰ = ۰$$

کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے میں مطلق رقم اپنی علامت برقرار رکھتی ہے (۲۷۔۴)
اگر ہم ہندسہ ۳ کو اختیار کرتے تو مطلق رقم مثبت ہو جاتی جو اس بات کی علامت ہے کہ ہم اصل سے آگے ہو گئے ہیں۔ ہمیں اس بات کی احتیاط رکھنی چاہیئے کہ پہلے استحالہ کے بعد (اس قید کا سبب مثال آئندہ میں نظر آئیگا) مطلق رقم پورے عمل میں اپنی علامت برقرار رکھے۔ اگر ہم نے سہواً بہت چھوٹا ہندسہ اختیار کیا ہے تو خطا خود ظاہر ہو جائیگی جیسا کہ معمولی تقسیم یا جذر نکالنے کے عمل میں ہوا کرتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں اس کے بعد آنیوالا ہندسہ ۹ سے بڑا ہوگا۔ ایسی غلطی ہونیکا احتمال بالعموم بہت کم ہے۔ لیکن ایسی خطا کثرت سے واقع ہوتی ہے جو ضرورت سے بڑے ہندسہ کے لینے میں سرزد ہوتی ہے اور اس خطا کا پتہ مطلق رقم کی علامت بدلجانے سے چل جائیگا۔ اوپر کے عمل حساب میں پانچویں استحالہ کو کام میں لائے بغیر یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ حل کا پانچواں ہندسہ ۴ ہے چنانچہ مطلوبہ اصل اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک ۴٫۲۶۴۴ ہے۔ (233)

۲۔ مساوات

$$لا^{۴} + ۴ لا^{۳} - ۴ لا^{۲} - ۱۱ لا + ۴ = ۰$$

کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ اسکی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

۱۰۶۳۴۹)	۴	۱۱-	۴-	۴	۱
	۱۰-	۱	۵	۱	
	۶۰۰۰۰-	۱۰-	۱	۵	
	۵۰۹۷۶	۷	۶	۱	
	۹۰۲۴۰۰۰۰-	۳۰۰۰-	۷	۶	
	۷۲۶۹۰۵۶۱	۱۱۴۹۶	۷	۱	
	۱۷۵۴۹۴۳۹۰۰۰۰-	۸۴۹۶	۱۴۰۰	۷	
	۱۵۲۱۳۱۰۵۲۰۱۶	۱۳۸۰۸	۵۱۶	۱	
	۲۳۳۶۳۳۳۷۹۸۴-	۲۲۳۰۴۰۰۰	۱۹۱۶	۸۰	
		۹۲۶۱۸۷	۵۵۲	۶	
		۲۳۲۳۰۱۸۷	۲۴۶۸	۸۶	
		۹۳۵۶۰۱	۵۸۸	۶	
		۲۴۱۶۵۷۸۸۰۰۰	۳۰۵۶۰۰	۹۲	
		۱۸۹۳۸۷۳۳۶	۳۱۲۹	۶	
		۲۴۳۵۵۱۷۵۳۳۶	۳۰۸۷۲۹	۹۸	
		۱۸۹۷۶۶۴۸۸	۳۱۳۸	۶	
		۲۴۵۴۴۹۴۱۸۲۴	۳۱۱۸۶۷	۱۰۴۰	
			۳۱۴۷	۳	
			۳۱۵۰۱۴۰۰	۱۰۴۳	
			۹۳۱۵۶	۳	
			۳۱۵۹۴۵۵۶	۱۰۴۶	
			۹۳۱۹۲	۳	
			۳۱۶۸۷۷۴۸	۱۰۴۹	
			۹۳۲۲۸	۳	
			۳۱۷۸۰۹۷۶	۱۰۵۲۰	
				۶	
				۱۰۵۲۶	
				۶	
				۱۰۵۳۲	
				۶	
				۱۰۵۳۸	
				۶	
				۱۰۵۴۴	

234) پانچویں استحالہ کی تکمیل کے بغیر ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اصل کا پانچواں ہندسہ ۹ ہے۔ اس لئے اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک اصل کی قیمت ہے ۱۶۲۳۶۹ء۱۱
دوسرے استحالہ کے بعد سے آزمائشی مقسوم علیہ موثر ہو جاتا ہے چنانچہ اس سے عدد ۳ ٹھیک طور پر معلوم ہوتا ہے اور پھر اصل کے دیگر ہندسے بھی۔ پہلی استحالہ شدہ مساوات کی آخری دو رقمیں منفی ہیں۔ اس لئے ہم اس بات کی اُمید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے قبل کے سروں کا اثر آزمائشی مقسوم علیہ کی بہ نسبت زیادہ ہونا چاہئے جیسا کہ اس صورت میں یہ امر واقعہ ہے۔ ہندسہ ۶ جو اصل کا دوسرا ہندسہ ہے اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا چاہئے۔ ہمیں اس بات کی تعیین کرنی ہوگی کہ مساوات

$$x^4 + 80x^3 + 1400x^2 - 3000x - 6000 = 0$$

کی اصل کا صفر اور ۱۰ کے درمیان محل وقوع کیا ہے۔ چند آزمائشوں سے معلوم ہو جائیگا کہ ۶ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور ۷ سے مثبت۔ پس اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہے اور ۶ وہ ہندسہ ہے جس کی ہمیں جستجو ہے۔ اس کے بعد کے ہندسوں کے لئے ہم وہ بڑے سے بڑے ہندسے ۳، ۶، ۹ لیتے ہیں جو مطلق رقم کی منفی علامت کو تبدیل نہیں کرتے۔ پہلے استحالہ میں اصلوں کو بقدر ایک کے گھٹانے میں مطلق رقم کی علامت بدلجاتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم صفر اور ایک کے درمیان والی اصل سے گذر چکے ہیں کیونکہ صفر سے مثبت نتیجہ ۴ حاصل ہوتا ہے اور ایک سے منفی نتیجہ -۲۔ باقی تمام استحالوں میں جب تک کہ ہم اصل کے نیچے رہتے ہیں مطلق رقم کی علامت وہی ہونی چاہئے جو ایک کے اندراج سے حاصل ہوتی ہے اور یہ فی الحقیقت اس بات کا فرض کرلینا ہے کہ کوئی اصل ایک اور اس ہندسہ کے درمیان واقع نہیں ہوتی جس کی ہمیں تلاش ہے۔ یہ مفروض سوال کی عبارت سے ہی ظاہر ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں مثبت ہیں۔ ان میں سے ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے اور اسلئے صرف ایک ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔

اس طور پر جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ اصلی خارج قسمت سے صرف آخری ہندسہ میں یا زیادہ سے زیادہ آخری دو ہندسوں میں فرق رکھیگا۔ ہارنر کے اجمالی عمل میں بھی یہی اصول ہے۔ ہم صرف وہ ہندسے برقرار رکھتے ہیں جو نتیجہ کو تقرب کے مطلوبہ درجہ تک حاصل کرنے میں موثر ہوں۔ جب اجمالی عمل شروع ہوتا ہے تو استحالہ شدہ مساوات کے متواتر سروں کو قبل الذکر طریقہ پر صفر لگانے کی بجائے ہم آخر سے دوسرے سر کے سیدھی طرف والے ایک ہندسہ کو آخر سے تیسرے سر کے سیدھی طرف والے دو ہندسوں کو آخری سے چوتھے سر کے سیدھی طرف والے تین ہندسوں وغیرہ کو کاٹ دیتے ہیں۔ اس کا اثر یہ ہوگا کہ عمل میں اہم ہندسے اپنی اپنی خاص جگہ پر قائم رہینگے اور غیر اہم ہندسے کُلاً خارج ہو جائینگے۔

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ ذیل کی مثالوں میں سے پہلی مثال میں اجمالی طریقہ سے حاصل کئے ہوئے پہلے استحالہ کا مقابلہ اُس متناظر استحالہ کے ساتھ کرے جو دفعہ ماسبق کی دوسری مثال میں مکمل طور پر حاصل کیا گیا ہے۔ تب اُسکو معلوم ہو جائیگا کہ کس طرح صدر ہندسے (یعنے وہ ہندسے جو نتیجہ کے حاصل کرنے کا اہم ترین حصہ لیتے ہیں) دونوں صورتوں میں منطبق ہوتے ہیں اور اپنے اضافی مقامات برقرار رکھتے ہیں حالانکہ غیر اہم ہندسے کُلاً خارج ہو جاتے ہیں۔

اس اختصار کے علاوہ جو اوپر بیان ہوا ہارنر کے عمل کے دیگر اختصاروں کی بھی بعض اوقات سفارش کیجاتی ہے لیکن ہم اُنکا ذکر کرنا اس وجہ سے ضروری نہیں سمجھتے کہ ان سے بہت کم فائدہ حاصل ہوتا ہے اور نیز غلطی کے احتمالات بڑھ جاتے ہیں۔ متذکرہ بالا اختصار ہارنر کے طریقہ تقرب میں اسقدر اہم تھا کہ اس طریقہ کا ذکر بغیر اس کو بیان کئے ہوئے غیر مکمل رہ جاتا۔

(236)

مثالیں

۱۔ دفعہ ماسبق کی مثال ۲ میں جو مساوات درج ہے۔ اس کی وہ حل اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو جو ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

اس مثال کے نتیجہ کو تسلیم کر کے ہم اجمالی عمل تیسرے استحالہ کی تکمیل کے بعد سے شروع کرینگے چنانچہ اس استحالہ کے بعد کا عمل ذیل میں درج ہے :۔

۱٦٢٣٦٩١٣٥٧٥) ۱۷۵۴۹۴۳۹-	۲۵۱٦۵۷۸۸	۳۱۵۰۴۴	۱۲۸۲
۱۵۲۱۳۰۹۰	۱۸۹۳٦	٦	
۲۳۳٦۳۴۹-	۲۵۳۵۵۱۵	۳۱۵٦	
۲۳۰۱۵۹۷	۱۸۹۷۲	٦	
۳۴۷۵۲-	۲۵۵۴۴۸۷	۳۱٦۲	
۲۵٦۰۱	۲۸۵	٦	
۹۱۵۱-	۲۵۵۷۳۳	۳۱٦۸	
۷٦۸۰	۲۸۵		
۱۴۷۱-	۲۵٦۰۱۸	۳۱	
۱۲۸۰			
۱۹۱-			
۱۷۹			
۱۲			

یہاں ہندسوں کو کاٹ دینے کے پہلے عمل سے یعنی آخر سے دوسرے سر سے ۸، آخر سے تیسرے سر سے ۴۴، آخر سے چوتھے سر سے ۵۲۔ کو خارج کر دینے سے چار درجی کا پہلا سر صرف ایک رہ جاتا ہے۔ اب ہم اصلوں کو بقدر ٦ کے گھٹاتے ہیں گویا کہ سر ۱، ۳۱۵۰، ۲۵۱٦۵۷۸، ۱۷۵۴۹۴۳۹- جو باقی رہ جاتے ہیں کبھی مساوات کے سر ہیں۔ اصل کے ایسے ہندسہ سے

ضرب دینے میں منقطع ہندسوں کو ذہن میں ضرب دے لینا چاہیے تاکہ حاصل
کے ہندسہ کو حساب میں شامل کیا جا سکے جیسا کہ مختصر تقسیم میں
کیا جاتا ہے۔

جب اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹانے کا عمل مکمل ہو جائے تو
استحالہ شدہ کنجی میں پھر ہم آخر سے دوسرے سر سے ۷، آخر سے تیسرے
سر سے ۶۸، قطع کرتے ہیں اور پہلا سر بالکل غائب ہو جاتا ہے۔
عمل پھر اس طور پر جاری رہتا ہے گویا صرف دو درجی کے سروں
۳۱، ۲۵۵۴۴۸، –۲۳۳۶۳۴۹ سے واسطہ ہے۔ ہندسوں کو
پھر قطع کرنے کے عمل کا اثر یہ ہوگا کہ سر ۳۱ بالکل خارج ہو جائیگا۔
بعد کا عمل اجمالی تقسیم کے عمل کے مماثل ہو جاتا ہے۔ جب
عمل ختم ہو جاتا ہے تو خارج قسمت میں اعشاری ہندسوں کی
تعداد آخر کے دو یا تین ہندسوں تک صحیح خیال کیجا سکتی ہے
اجمالی عمل شروع کرنے سے پیشتر اصل کو جس حد تک معلوم کرنا
پڑتا ہے وہ اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات کی تعداد پر منحصر ہوتی
ہے کیونکہ اجمالی عمل شروع ہو جانے کے بعد معلومہ ہندسوں
کے علاوہ ہمیں ہندسوں کی اتنی تعداد جو آزمائشی مقسوم علیہ کے
کے ہندسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے کم ہے حاصل ہوگی۔

۲۔ مساوات

$$\text{لا}^{4} - 12\,\text{لا} + 7 = 0$$

کی وہ اصل جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اعشاریہ کے سات
یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو۔

(237)

اس مساوات کی صرف دو مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں،
ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دوسری
۲ اور ۳ کے درمیان۔ دوسری کو معلوم کرنے کے لئے ہم

ذیل کا عمل کرتے ہیں :—

٢٦٠٤٢٧٥٥٦٧١)	٧	١٢-	٠	٠
	٨-	٨	٤	٢
	١٠٠٠٠٠٠٠٠٠-	٤-	٤	٢
	٨٣٨٩١٤٥٦	٢٤	٨	٢
	١٦١٠٨٥٤٤-	٢٠٠٠٠٠٠٠	١٢	٤
	١٥٤٩٣٤٠١	٩٦٢٨٦٤	١٢	٢
	٦١٥١٤٣-	٢٠٩٦٢٨٦٤	٢٤٠٠٠٠	٦
	٤٤٦٢٦٢	٩٨٥٧٩٢	٣٢١٦	٢
	١٦٨٨٨١-	٢١٩٥٨٦٥٦	٢٤٣٢١٦	٨٠٠
	١٥٦٢٢٦	١٧٤٧٨	٣٢٣٢	٤
	١٢٦٥٥-	٢٢١٣٣٤٣	٢٤٦٤٤٨	٨٠٤
	١١١٥٩	١٧٤٧٨	٣٢٤٨	٤
	١٤٩٦-	٢٢٣٠٨٢	٢٤٩٦٩٦	٨٠٨
	١٣٣٨	٤٩	٢٤٩	٤
	١٥٨-	٢٢٣١٣١		٨١٢
	١٥٦	٤٩		٤
	٢	٢٢٣١٨٠	٢٤	٨١٦

یہاں اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے کے بعد اور استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دینے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ ۲۰۰۰۰، مطلق رقم ۱۰۰۰۰ کو تقسیم نہیں کر سکتا۔ اس لئے ہم خارج قسمت میں صفر رکھتے ہیں اور پھر اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دیتے ہیں۔ باقی کا عمل حسب سابق کیا گیا ہے۔

۳ — اُسی مساوات کی وہ اصل معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔

جواب :- ٫۵۹۳۶۸۵۸۲۹

۴ ـــ مساوات

$$\text{لا}^3 + ۲۴٫۸۴\ \text{لا}^2 - ۷۶٫۶۱۳\ \text{لا} - ۳۷۶۱٫۲۷۵۸ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو ـ

جب مجوزہ مساوات میں علامات اعشاریہ شامل ہوں تو یہ معلوم ہوگا کہ اصل کا اعشاری حصہ شروع ہونے کے بعد۔ اسے متواتر ضرب دینے کی وجہ سے وہ بہت جلد غائب ہو جاتی ہیں ـ

جواب :- ۱۱٫۱۹۷۳۲۲۲

۵ ـــ مساوات

$$\text{لا}^3 - ۱۲\ \text{لا}^2 + ۱۲\ \text{لا} - ۳ = ۰$$

کی منفی اصل اعشاریہ کے سات مقامات تک معلوم کرو ـ

جب منفی اصل معلوم کرنا مطلوب ہو تو لا کی علامت بدل دینے اور استحالہ شدہ مساوات کی متناظر مثبت اصل معلوم کرنے میں سہولت ہوگی ـ

جواب :ـــ ۳٫۹۰۷۳۷۸۵ـ

۱۱۱ ـــ ہارنر کے طریقہ کا استعمال ایسی صورتوں میں جہاں اصلیں تقریباً مساوی ہوں (288)

ـ دفعہ ۱۰۷ میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ تقرب کا وہ طریقہ جو وہاں بیان ہوا ناکام رہتا ہے جب مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہوں ـ اس نوعیت کی مثالیں اپنی تحلیل (دیکھو مثال ۲، دفعہ ۹۸) اور اپنے حل دونوں میں سب سے زیادہ مشکلیں پیدا کرتی ہیں ـ ہارنر کے طریقہ سے ایسی مساواتوں کا حل معلوم کرنا ممکن ہے اگرچہ دوسری صورتوں کی بہ نسبت ہمیں ذرا زیادہ محنت کرنی پڑتی ہے ـ جب تک کہ دونوں اصلوں کے صدر ہند سے ایک ہی رہتے ہیں اس وقت تک چند پیش بندیوں کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے ـ یہ پیش بندیاں ذیل کی مثالوں سے ظاہر

ہو جائینگی ۔ دونوں اصلوں کو جدا کرنے کے بعد عمل حساب ہر ایک کے لئے جداگانہ طور پر دفعات ماسبق کی مثالوں کی طرح کیا جاتا ہے ۔ دفعہ ۱۰۹ میں آزمائشی مقسوم علیہ کی جو تشریح کی گئی ہے اس سے یہ ظاہر ہے کہ زیر بحث صورت میں نیوٹن کا طریقہ جس سبب سے ناکام رہتا ہے (دفعہ ۱۰۷) اسی سبب سے آزمائشی مقسوم علیہ اسوقت تک موثر نہیں ہوگا جبتک کہ اصلوں کو جدا کرنے کے بعد پہلی یا دوسری منزل کی تکمیل نہ ہو جائے ۔

مثالیں

۱ ـــ مساوات

$$لا^{۳} - ۷ لا + ۷ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان ہیں (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۶)۔ ہر ایک اصل اعشاریہ کے ۸ مقامات تک معلوم کرو ۔

اصلوں کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات (ان اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دینے کے بعد) یعنی

$$لا^{۳} + ۳۰ لا^{۲} - ۴۰۰ لا + ۱۰۰۰ = ۰$$

کی دو اصلیں صفر اور ۱۰ کے درمیان ہونی چاہئیں ۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں ایک تو ۳ اور ۴ کے درمیان اور دوسری ۶ اور ۷ کے درمیان ۔ اب اصلیں جدا ہو جاتی ہیں اور ہم ہر ایک کے دریافت کرنے میں وہی عمل اختیار کرتے ہیں جو پہلے بیان ہو چکا ہے ۔ اگر اس منزل پر اصلیں جدا نہ ہوتیں تو ہم وہ صدر ہندسہ معلوم کرتے جو دونوں میں مشترک ہوتا اور پھر اصلوں کو بقدر اس ہندسہ کے گھٹانے کے بعد یہ دیکھتے کہ استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں کن وقفوں کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس

جواب :- ۱٫۳۵۶۸۹۵۸۴ ، ۱٫۶۹۲۰۲۱۴۷

۲ ـــ مساوات

$$لا^{۳} - ۴۹ لا^{۲} + ۶۵۸ لا - ۱۳۷۹ = ۰$$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان واقع ہیں ۔

ان میں سے چھوٹی اصل کے لئے تقریب کا مکمل عمل اعشاریہ کے ۷ مقامات تک بتایا جائیگا اور پھر چند مشاہدات کئے جائینگے تاکہ طالب علم کو اس قسم کی تمام صورتوں میں مدد ملسکے ۔

(239)

۱ ‏‏ ۴۹- ‏‏ ۶۵۸ ‏‏ ۱۳۷۹- ‏‏ (۲۳،۲۱۳۱۲۷۷

۲۰ ‏‏ ۵۸۰- ‏‏ ۱۵۶۰
۲۹- ‏‏ ۷۸ ‏‏ ۱۸۱
۲۰ ‏‏ ۱۸۰- ‏‏ ۱۸۰-
۹- ‏‏ ۱۰۲- ‏‏ ۱۰۰۰
۲۰ ‏‏ ۴۲ ‏‏ ۹۹۲-
۱۱ ‏‏ ۶۰- ‏‏ ۸۰۰۰
۳ ‏‏ ۵۱ ‏‏ ۶۷۳۹-
۱۴ ‏‏ ۹۰۰- ‏‏ ۱۲۶۱۰۰۰
۳ ‏‏ ۴۰۴ ‏‏ ۱۲۱۷۴۰۳-
۱۷ ‏‏ ۴۹۶- ‏‏ ۴۳۵۹۷
۳ ‏‏ ۴۰۸ ‏‏ ۳۴۱۸۳-
۲۰۰ ‏‏ ۸۸۰۰- ‏‏ ۹۴۱۴
۲ ‏‏ ۲۰۶۱ ‏‏ ۶۷۸۶-
۲۰۲ ‏‏ ۶۷۳۹- ‏‏ ۲۶۲۸
۲ ‏‏ ۲۰۶۲ ‏‏ ۲۳۷۲
۲۰۴ ‏‏ ۴۶۷۷۰۰- ‏‏ ۲۵۶
۲ ‏‏ ۶۱۸۹۹ ‏‏ ۲۳۶-
۲۰۶۰ ‏‏ ۴۰۵۸۰۱- ‏‏ ۲۰

Column 1: ۲۰۶۰، ۱، ۲۰۶۱، ۱، ۲۰۶۲، ۱، ۲۰۶۳۰، ۳، ۲۰۶۳۳، ۳، ۲۰۶۳۶، ۳، ۲۰۶۳۹

Column 2: ۶۱۹۰۸، ۳۴۳۸۹۳-، ۲۰۶، ۳۴۱۸۳-، ۲۰۶، ۳۳۹۷۷-۱۶۷، ۴، ۳۳۹۳-، ۴، ۳۳۸۹-۲

اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے مطلق رقم کی علامت بدلجاتی ہے
یہ اس بات کی علامت ہے کہ ایک اصل صفر اور ۲۰ کے درمیان واقع
ہے جس سے فی الحال ہمیں کوئی تعلق نہیں ہے پہلی استحالہ شدہ مساوات

لا^۳ + ۱۱ لا^۲ − ۱۰۲ لا + ۱۸۱ = ۰

کی اصلیں تاہم جدا نہیں ہوئیں کیونکہ دونوں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع
ہوتی ہیں ۔ ان دونوں عددوں کے اندراج سے مثبت نتیجہ حاصل ہوتا
ہے اور اس لئے یہاں ہمیں وہ معیار نہیں ملتا جو پہلی مثالوں میں مختصر
ہندسہ کی تلاش کرنے میں مدد دینے کے لئے حاصل ہوا تھا یعنی مطلق رقم
میں علامت کی تبدیلی نہیں ملتی ۔ تاہم ایک دوسرا معیار ایسا ہے جس سے
صرف اندراج کے ذریعہ وہ وقفہ معلوم ہوسکتا ہے جس کے اندر یہ دونوں (240
اصلیں واقع ہوتی ہیں ۔ اگر ہم لا^۳ + ۱۱ لا^۲ − ۱۰۲ لا + ۱۸۱ = ۰ کی
اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات لا^۳ + ۲۳ لا^۲ + ۴۳ لا + ۱۳ = ۰
میں علامت کی کوئی تبدیلی ظہور پذیر نہیں ہوتی ۔ پس یہ دونوں اصلیں صفر
اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی چاہئیں ۔ اگر ہم اس کی اصلوں کو بقدر ۳
کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات میں (جیساکہ اوپر کے عمل سے ظاہر ہے)
علامت کی تبدیلیوں کی تعداد وہی ہے جو خود مساوات میں علامت کی
تبدیلیوں کی ہے ۔ پس یہ دونوں اصلیں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع
ہوتی ہیں ۔ اس لئے وہ ابتک جدا نہیں ہوئیں اور ہم اصلوں کو بقدر
۳ کے گھٹاتے ہیں ۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات

لا^۳ + ۲۰۰ لا^۲ − ۹۰۰ لا + ۱۰۰۰ = ۰

میں اسی طرح دونوں اصلوں کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا
ہے کیونکہ بقدر ۲ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سروں میں علامت
کی دو تبدیلیاں رہتی ہیں (دیکھو عمل بالا) اور بقدر ۳ کے گھٹانے سے تمام
علامتیں مثبت حاصل ہوتی ہیں ۔ چنانچہ اس حد تک دونوں اصلیں اپنے
پہلے تین ہندسوں تک مماثل ہیں یعنے ۲۳ء۳ تک ۔ پھر ہم بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں تو

استحالہ شدہ مساوات لا^{3} + ۲۰۶۰ لا^{2} − ۸۸۰۰ لا + ۰۰۰۱۲۶۱ = ۰ کی صرف ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ ۱ سے مثبت اور ۲ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی دوسری اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے کیونکہ ۳ سے مثبت نتیجہ ملتا ہے۔ اب اصلیں جدا ہو گئیں۔ ہم عمل بالا میں چھوٹی اصل کا تقرب اس مساوات کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے حاصل کرتے ہیں۔ آزمائشی مقسوم علیہ دوسری منزل سے موثر ہو جاتا ہے بڑی اصل کا تقرب حاصل کرنا ہو تو اسی مساوات کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانا چاہیئے اور اس بات کی احتیاط رکھنی چاہیئے کہ بعد کے اعمال میں منفی علامت جو اس استحالہ کی وجہ سے مطلق رقم کی ہو گی برقرار رہے۔ یہ دوسری اصل ہو گی ۲۳،۲۲۹۵۲۱۲ –

جب تک دونوں اصلیں ایک ساتھ رہتی ہیں اصل کے مناسب ہندسہ کا پتہ آخر سے دوسرے سر سے آخری سر کو دوچند کر کے تقسیم کرنے سے پاسکتا ہے یا آخر سے تیسرے سر سے آخر سے دوسرے سر کو دوچند کر کے تقسیم کرنے سے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات اب ایسے دو درجی کے قریب آتی ہے جو ہر استحالہ شدہ مساوات کے آخری تین سروں سے بنتی ہے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ پچھلی صورتوں میں اور نیوٹن کے طریقہ میں مجوزہ مساوات کا تقرب آخری دو سروں سے بننے والی مفرد مساوات کی شکل میں حاصل ہوا تھا۔ متذکرہ صدر دو درجی کی دونوں اصلیں مجوزہ مساوات کی وہ اصلیں ہونگی جو تقریباً مساوی ہیں، اور جب مساوات ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ کی دونوں اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو انمیں سے کوئی ایک $\frac{-۲ج}{ب}$ یا $\frac{-ب}{۲ا}$ سے تقریباً حاصل ہو جاتی ہے۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ہندسہ ۲، $\frac{۲\times۱۸۱}{۱۰۲}$ سے اور ہندسہ ۲، $\frac{۲\times۱۰۰۰}{۹۰۰}$ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس طریقہ سے ہم عام

طور پر پہلی کوشش میں وہ دو ہندسے معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان اصلوں کا زوج واقع ہے۔ نیز اس سے ہمیں اصلوں کے جدا ہونیکا پتہ بھی اس امر کا مشاہدہ کرنے سے لگ جاتا ہے کہ آخری تین سروں سے اس طور پر حاصل کئے ہوئے ہندسے کب مختلف ہوتے ہیں یعنی کب $\frac{۲ج}{ب}$ اور $\frac{ب}{۲ا}$ مختلف ہوتے ہیں۔

۳ — مساوات

$لا^۴ + ۸ لا^۳ - ۷۰ لا^۲ - ۱۴۴ لا + ۹۲۶ = ۰$

کی وہ اصلیں جو ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہیں اعشاریہ کے تین مقامات تک محسوب کرو۔

جواب:۔ ۴٬۲۴۲، ۴٬۲۴۶

۴ — مساوات

$۶۴ لا^۳ - ۵۹۲ لا^۲ + ۱۶۴۹ لا - ۱۴۴۵ = ۰$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہیں۔

جواب:۔ دونوں اصلیں = ۲٬۱۲۵

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مقام اعشاریہ تک دونوں اصلیں جدا نہیں ہوئیں۔ جب ہم بقدر ۵ کے گھٹاتے ہیں تو مطلق رقم معدوم ہوتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ۲٬۱۲۵ ایک اصل ہے۔ پھر بقدر ۵ کے گھٹانے سے آخر سے دوسرا سر بھی معدوم ہو جاتا ہے پس ۲٬۱۲۵ دوہری اصل ہے۔

جب کسی مساوات میں دو سے زیادہ تقریباً مساوی اصلیں ہوں تو وہ سب ہارنر کے عمل سے متذکرۂ بالا طریقہ کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔ عمل میں ایسی صورتیں بہت شاذ واقع ہوتی ہیں۔ طالب علم کے لئے وہ اصول جو اوپر بیان کیا گیا ہے ایسی تمام صورتوں میں رہبری کرنے کے لئے کافی ہے۔

(241)

۱۱۲۔ تقرب کا لگرانج کا طریقہ۔ لگرانج نے عددی مساوات کی اصل کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں بیان کرنے کا ایک طریقہ معلوم کیا ہے۔ لیکن چونکہ یہ طریقہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کے طریقہ کے مقابلہ میں بہت ادنیٰ حیثیت رکھتا ہے اس لئے اسکا صرف مختصر ذکر کرنے پر ہم اکتفا کرینگے۔

فرض کرو کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اور صرف ایک اصل متصلہ اعداد ا اور ا+۱ کے درمیان واقع ہے۔ مجوزہ مساوات میں لا کی بجائے ا + $\frac{1}{ما}$ درج کرو۔ ما میں استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی۔ فرض کرو کہ امتحان کرنے سے اسکا ب اور ب + ۱ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ما میں یہ جو مساوات ہے اس کو ما = ب + $\frac{1}{مي}$ کے اندراج سے مستحیل کرو۔ ی میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصل کا ج اور ج + ۱ کے درمیان واقع ہونا معلوم کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو جاری رکھنے سے اصل کا تقرب ایک مسلسل کسر کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے مثلاً

$$ا + \cfrac{1}{ب + \cfrac{1}{ج + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^{۳} - ۲لا - ۵ = ۰$$

کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔ لا = ۲ + $\frac{1}{ما}$ کا استحالہ

عمل میں لانے کے لئے اول ہم دفعہ ۳۴ کا عمل استعمال کرتے ہیں اور اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں۔ پھر ہم وہ مساوات معلوم کرتے ہیں جس کی اصلیں استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کی متکافی ہوں۔

(242)

اس طور پر ما میں جو مساوات حاصل ہوتی ہے وہ ہے

ما^{3} − ۱۰ ما^{2} − ۶ ما − ۱ = ۰

اسکی ایک اصل ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان ہے۔ ما = ۱۰ + $\frac{1}{\text{ی}}$ درج کرو تو ی میں مساوات حاصل ہو گی

۶۱ ی^{3} − ۹۴ ی^{2} − ۲۰ ی − ۱ = ۰

اسکی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔ رکھو ی = ۱ + $\frac{1}{\text{ع}}$ تو ع میں مساوات ہو گی

۶۵۴ ع^{3} + ۶۲۵ ع^{2} − ۶۸۹ ع − ۶۱ = ۰

جس کی اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔

اس لئے اصل کے لئے ہمیں ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے:۔

$$\text{لا} = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

۲۔ لا^{3} − ۶ لا − ۱۳ = ۰ کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو۔

جواب:۔

$$3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

۱۱۳۔ چار درجی کا عددی حل۔ عددی مساواتوں کے حل کا

مضمون ختم کرنے سے پیشتر چھٹے باب میں بیان کردہ حل کے طریقوں کے عملی فائدوں کا ذکر کرنا ضروری ہے ۔ گو یہ بیان کیا گیا تھا کہ مساواتوں کا عددی حل اس باب کے طریقوں سے عموماً سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے لیکن ایسی صورتیں بھی ہیں جنمیں چار درجی کے حل کے لئے چھٹے باب کے طریقوں کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے جب چار درجی مساوات سے محول کعبی ملجائے جسکی ایک اصل متوافق ہو تو اس اصل کو فوراً معلوم کیا جاسکتا ہے اور چار درجی کے حل کی تکمیل ہو سکتی ہے ۔ ہم اس قسم کی چند مثالیں ڈیکارٹ کا طریقہ استعمال کر کے (دفعہ ۶۴) حل کرتے ہیں جو عموماً ایسی صورتوں میں عملی طور پر سب سے زیادہ سہولت بہم پہنچاتا ہے ۔

مثالیں

۱ ـــ چار درجی

لا۴ - ۶ لا۳ + ۳ لا۲ + ۲۲ لا - ۶

کو دو درجی اجزا میں تحلیل کرو ۔

دفعہ ۶۴ کا مفروض اختیار کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے ہیں

ف + فَ = -۳، ق + قَ + ۴ ف فَ = ۳، ف قَ + فَ ق = ۱۱، ق قَ = -۶

نیز فہ = ۱/۲ - ف فَ = ۱/۴ (ق + قَ - ۱)

اور ع اور ج کو محسوب کرنے سے فہ کے لئے مساوات ملتی ہے

۴ فہ۳ - ۱۱۱/۴ فہ - ۲۲۵/۸ = ۰

اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور رکھو ۴ فہ = ت تو

ت۳ - ۱۱۱ ت - ۴۵۰ = ۰

اب مقسوم علیہم کے طریقہ سے یہ بہ آسانی معلوم ہوتا ہے کی اسکی

ایک اصل - ٦ ہے پس فہ = - $\frac{۳}{۲}$ جس سے

ف فَ = ۲ ، ق + قَ = ۵۰

ان کو اوپر کی مساواتوں کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو

ف = - ۲ ، فَ = - ۱ ، ق = ۱ ، قَ = - ٦

جب ، ق اور قَ کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو وہ مساوات جس سے ف قَ + فَ ق کی قیمت حاصل ہوتی ہے اس بات کا تعین کریگی کہ ق کی کونسی قیمت ف کے ساتھ اور کونسی فَ کے ساتھ لینی چاہئے - اس لئے مجوزہ چاردرجی ذیل کے اجزاء میں تحلیل ہوجاتا ہے

(لا^{۲} - ۴ لا + ۱) (لا^{۲} - ۲ لا - ٦)

فہ کی دوسری دو قیمتوں کے ذریعہ ہم چاردرجی کو دو اور طریقوں سے تحلیل کرسکتے ہیں یا ہم اسی عمل کو محصلہ دو درجی کے حل کرنے سے مکمل کرسکتے ہیں -

۲ — چاردرجی ف (لا) ≡ لا^{۴} - ۸ لا^{۳} - ۱۲ لا^{۲} + ٦۰ لا + ٦۳

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو -

فہ کے لئے مساوات ہے

۴ فہ^{۳} - ۱۹۵ فہ - ۴۷۵ = ۰

جسکی ایک اصل - ۵ ہے -

جواب :- ف (لا) ≡ (لا^{۲} - ۲ لا - ۳) (لا^{۲} - ٦ لا - ۲۱)

۳ — ف (لا) ≡ لا^{۴} - ۱۰ لا^{۲} - ۲۰ لا - ٦ (244)

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو -

محول کعبی ہے

$$۴ \text{ فہ}^{۳} - \frac{۲۱۷}{۱۲} \text{ فہ} + \frac{۳۱۸۵}{۲۱٦} = ۰$$

یا اصلوں کو ٦ سے ضرب دینے سے

۴ ت^{۳} - ٦۵۱ ت + ۳۱۸۵ = ۰

اسکی ایک اصل ۷ ہے۔ پس $\text{فہ} = \frac{۷}{۲}$

جواب:۔ $\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۲)(\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} - ۳)$

۴— $\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۴} - ۶\,\text{لا}^{۳} - ۹\,\text{لا}^{۲} + ۶۶\,\text{لا} - ۲۲$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

محول کعبی ہے

$$۴\,\text{فہ}^{۳} - \frac{۳۳۵}{۴}\,\text{فہ} - \frac{۸۹۷}{۸} = ۰$$

پس $\text{فہ} = -\frac{۳}{۲}$

جواب:۔ $\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا}^{۲} - ۱۱)(\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} + ۲)$

۵— $\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۴} - ۸\,\text{لا}^{۳} + ۲۱\,\text{لا}^{۲} - ۲۶\,\text{لا} + ۱۴$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جواب:۔ $\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۲)(\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} + ۷)$

۶— $\text{لا}^{۴} + ۱۲\,\text{لا} + ۳$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جواب:۔ $(\text{لا}^{۲} - \text{لا}\sqrt{۶} + ۳ + \sqrt{۶})(\text{لا}^{۲} + \text{لا}\sqrt{۶} + ۳ - \sqrt{۶})$

۷— $۴\,\text{لا}^{۴} - ۸\,\text{لا}^{۳} - ۱۲\,\text{لا}^{۲} + ۸۴\,\text{لا} - ۶۳ = ۰$

کے دو درجی اجزاء معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۳۶۴)

جواب:۔ $\{\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}(۲ + \sqrt{۷}) + ۳\sqrt{۷}\}\{\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}(۲ - \sqrt{۷}) - ۳\sqrt{۷}\}$

(24ق)

متفرق مثالیں

۱— $\text{لا}^{۳} - ۶\,\text{لا} - ۱۳ = ۰$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :— ۳٫۱۷۶۸۱۴۳۹۳

۲ — لا^{۳} − ۲لا − ۵ = ۰

کی مثبت اصل اعشاریہ کے ۸ یا ۹ مقامات تک معلوم کرو ۔

جواب :— ۲٫۰۹۴۵۵۱۴۸۳

۳ — مساوات

۲لا^{۳} − ۶۵۰٫۸ لا^{۲} + ۵ٛ لا − ۱۲۲۷ = ۰

کی ایک اصل ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان ہے ۔ اسکو معلوم کرو ۔

جواب :— متوافق اصل ۳۲۵٫۴

۴ — مساوات

۴ لا^{۳} − ۱۸۰ لا^{۲} + ۱۸۹۶ لا − ۴۵۷ = ۰

کی وہ اصل معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان ہے ۔

جواب :— ۲۸٫۵۲۱۲۷۷۳۸

۵ — مساوات

لا^{۳} − ۴۹ لا^{۲} + ۶۵۸ لا − ۱۳۷۹ = ۰

کی وہ اصل اعشاریہ کے چھہ مقامات تک معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے ۔

جواب :— ۲٫۵۵۷۳۵۱

۷ — مساوات

لا^{۳} + ۲ لا^{۲} − ۲۳ لا − ۷۰ = ۰

کی مثبت اصل اعشاریہ کے تقریباً ۱۰ مقامات تک معلوم کرو ۔

جواب :— ۵٫۱۳۴۵۷۸۷۲۵۲۸

۸ — ۶۷۳۳۷۳۰۹۷۱۲۵ کا جذر الکعب معلوم کرو ۔

جواب :— ۸۷۶۵

۹ — ۵۳۷۸۲۴ کا پانچواں جذر معلوم کرو ۔

جواب :— ۱۴

۱۰ — کعبی مساوات

$$لا^{۳} - ۳لا + ۱ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

مثال ۷ صفحہ ۱۴۶) کی مساوات $لا^{۶} + لا^{۳} + ۱ = ۰$ مساوات بالا میں تحویل ہوتی ہے۔

جواب :- −۱٫۸۷۹۳۸، ۰٫۳۴۷۲۹، ۱٫۵۳۲۰۹

چھوٹی مثبت اصل سے ذیل کے مسئلہ کا حل ملتا ہے :- ایک نصف کرہ کو جس کا نصف قطر اکائی ہو دو مساوی حصوں میں قاعدے کے متوازی مستوی سے تقسیم کرنا۔

۱۱ — کعبی $لا^{۳} + لا^{۲} - ۲لا - ۱ = ۰$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔　　(دیکھو مثال ۱ صفحہ ۱۴۵)

(246)

جواب :- −۱٫۸۰۱۹۴، −۰٫۴۴۵۰۴، ۱٫۲۴۶۹۸

۱۲ — مساوات

$$لا^{۵} + لا^{۴} - ۴لا^{۳} - ۳لا^{۲} + ۳لا + ۱ = ۰$$

کی منفی اصل، −۱ اور صفر کے درمیان، اعشاریہ کے ۵ مقامات تک معلوم کرو (دیکھو مثال ۳ صفحہ ۱۴۶)

جواب :- −۰٫۲۸۴۶۳

۱۳ — مساوات

$$لا^{۳} - ۳۱۵لا^{۲} - ۱۹۶۸۴لا + ۲۹۷۷۲۶۰ = ۰$$

کو حل کرو۔

ہم یہاں یہ دیکھتے ہیں کہ ایک اصل ۷۰ اور ۸۰ کے درمیان ہے۔ ہارنر کے عمل سے اس اصل کا ۷۸ ہونا معلوم ہوتا ہے۔ استحالہ شدہ مساوات سے دو اصلیں ملتی ہیں جن کو بقدر ۷۸ کے بڑھا دیا جائے تو کعبی کی باقی دو اصلیں حاصل ہوتی ہیں۔

جواب :- ۷۸، ۳۴۷، −۱۱۰

۱۴ — مساوات $لا^{۴} - ۲۷۱۱۷لا + ۴۰۳۸۵ = ۰$

کی دو حقیقی اصلیں ہیں ۔ اِن کو معلوم کرو ۔

جواب :— ۲۱،۴۳۰۶۷۳،۴۵۵۹۲

مسٹر جی ۔ ایچ ۔ ڈارون نے اس مساوات کو مقالہ

On the precession of a viscous spheroid, and on the Remote History of the Earth

میں درج کیا ہے ۔ دیکھو Phil. Trans. حصہ دوم بابتہ ۱۸۷۹ء صفحہ ۵۰۸ ۔
یہ اصلیں " زمین کی گردش کے جذر الکعب کی وہ دو قیمتیں ہیں جنکے لئے زمین اور چاند ملکر ایک استوار جسم کی طرح حرکت کرتے ہیں "

۱۵ — مساوات

$$۲۰\,\text{لا}^{۳} - ۲۴\,\text{لا}^{۲} + ۳ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو ۔

جواب :— ۱،۰۶۸۶۵، ۰،۴۴۶۰۳، ۰،۳۱۴۶۹-

یہ مساوات ایک مسئلہ کے حل میں واقع ہوتی ہے جو پروفیسر ٹاون سینڈ نے ایجوکیشنل ٹائمز بابتہ دسمبر ۱۸۷۸ء میں ایک ایسے شہتیر کے انصراف کو متعین کرنے کے لئے بیان کیا ہے جو یکساں طور پر لدا ہوا ہو اور جو اپنے دونوں سروں اور نقاط تثلیث پر تھما ہوا ہو ۔ متذکرۂ صدر حل پروفیسر بال نے حاصل کیا تھا ۔

۱۶ — مساوات

$$۱۴\,\text{لا}^{۳} + ۱۲\,\text{لا}^{۲} - ۹\,\text{لا} - ۱۰ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو ۔

جواب :— ۰،۸۵۹۰۶

یہ اور ذیل کی مثالوں کی مساواتیں ایسے سوالوں کی تحقیقات میں واقع ہوتی ہیں جو ٹیکنوں پر تھمے ہوئے شہتیروں سے متعلق ہوتے ہیں ۔

۱۷ — مساوات

$$۷\,\text{لا}^{۴} + ۲۰\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۱۶\,\text{لا} - ۸ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو ۔

جواب :- ۰٫۹۱۳۲۶

۱۸ — مساوات

$$لا^{۵} + ۱۲ لا^{۴} + ۵۹ لا^{۳} + ۱۵۰ لا^{۲} + ۲۰۱ لا - ۲۰۷ = ۰$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے دس مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۰٫۶۲۳۸۶۰۵۸۰۳۳

(247)

۱۹ — $ف(لا) \equiv لا^{۵} + ۲لا^{۴} - ۳۶ لا^{۳} - ۱۴۹ لا^{۲} - ۲۳۲ لا - ۳۳۶ = ۰$

کی سب متوافق اصلیں معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو۔

جواب :- $ف(لا) \equiv (لا^{۲} + لا + ۳)(لا + ۴)^{۲}(لا - ۷)$

۲۰ — اسی طرح مساوات

$$ف(لا) \equiv لا^{۵} - ۳۲ لا^{۴} + ۱۱۶ لا^{۳} - ۱۱۶ لا^{۲} + ۱۱۵ لا - ۸۴ = ۰$$

کو حل کرو۔

جواب :- $(لا^{۲} + ۱)(لا - ۱)(لا - ۳)(لا - ۲۸)$

۲۱ — وہ شرط معلوم کرو کہ دفعہ ۹۹ مثال ۳ میں اسٹرم کا جو دو درجی باقی ہے اس کی اصلیں خیالی ہوں۔

جواب :- $ہ ع + ۳ ا ج$ مثبت۔

یہ شرط اسوقت پوری ہوتی ہے جبکہ ہ اور ج دونوں مثبت ہوں (کیونکہ اس صورت میں دفعہ ۲۷ کی مماثلہ کی رو سے ع کو مثبت ہونا چاہیئے) اس لئے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ متذکرہ صدر چار درجی حقیقی اصلیں نہیں رکھتا جبکہ ہ اور ج مثبت ہوں (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۲۳)

۲۲ — جب اس چار درجی کی دو اصلیں عہ کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا عہ + ب = \frac{-گ ع}{۲ ہ ع - ۳ ا ج}$$

۲۳ — اگر مساوات $ف(لا) = ۰$ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو

ثابت کرو کہ مساوات ف (لا) ف" (لا) ـ [ف' (لا)]^{2} = ۰ کی سب اصلیں خیالی ہیں ـ

۲۴ ـــ اگر کسی درجہ کی مساوات میں جو لا کی قوتوں کی بموجب ترتیب دیگئی ہو تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں ـ

یہ تین رقمیں اس شکل ک لا^{ر} + ک ع لا$^{ر-1}$ + ک ع^{2} لا$^{ر-2}$ کی ہونی چاہئیں ـ فرض کرو کہ مساوات کو لا ـ ع سے ضرب دیا گیا ہے ـ تب حاصل شدہ مساوات کی دو متصل رقمیں غائب ہو جائینگی اور اسلئے اس کی کم از کم دو خیالی اصلیں ہونی چاہئیں لیکن اس مساوات کی اصلیں سوائے ع کے دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں ـ

۲۵ ـــ اگر کسی مساوات کے چار متصل سر سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اسکی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں ـ

اس کو گذشتہ مثال میں تحویل کیا جا سکتا ہے ـ ان چار رقموں کو انکی خاص شکل میں لکھ کر لا ـ ۱ سے ضرب دینے سے یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل شدنی مساوات کی تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ـ

۲۶ ـــ پانچ درجے کے لئے جسمیں دوسری رقم غیر موجود ہو اسٹرم کے پہلے دو باقیوں کو محسوب کرو ـ

ف (لا) ≡ لا^{5} + ا لا^{3} + ب لا^{2} + ج لا + د

جواب :ـ ر$_{1}$ ≡ ـ۲ ا لا^{3} ـ ۳ ب لا^{2} ـ ۴ ج لا ـ ۵ د

ر$_{2}$ ≡ ا لا^{2} + ب لا + ج

جہاں ا ≡ ۴۰ ا ج ـ ۱۲ ا^{3} ـ ۴۵ ب^{2}، ب ≡ ۵۰ ا د ـ ۸ ا^{2} ب ـ ۶۰ ب ج،

ج ≡ ـ۴ ا^{2} ج ـ ۷۵ ب د،

اوپر کی ترقیم کو باقی رکھیں تو تیسرے باقی ر$_{3}$ ≡ د لا + ع کے سروں

د اور ع کو ا، ب، ج، د، ا، ب، ج کی رقوم میں بآسانی محسوب کیا جا سکتا ہے۔ اور بالآخر $ک_۴$ کو ا، ب، ج، د، ع کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(248) ۲۷ — ثنائی سروں کے ساتھ لکھے ہوئے عام پانچ درجی سے دوسری رقم خارج کرو اور ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوتے ہیں ان کے صدر سر ہیں

$$ھ، \; - ۵ ھ ع + ۹ ا ب ج$$

۲۸ — ن ویں درجہ کی مساوات جس میں دوسری رقم غیر موجود ہو یعنی مساوات

$$لا^{ن} + ا لا^{ن-۲} + ب لا^{ن-۳} + ج لا^{ن-۴} + \ldots = ۰$$

کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوں اُن کے صدر سر معلوم کرو۔

اِن سروں کے علاوہ جو اوپر درج ہیں کوئی اور سر مطلوبہ قیمتوں میں شریک نہیں ہونگے۔ ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$ک_۱ \equiv - ۲ ا لا^{ن-۲} - ۳ ب لا^{ن-۳} - ۴ ج لا^{ن-۴} - \ldots$$

$$ک_۲ \equiv - \{ ۴ (ن - ۲) ا^۳ - ۸ ن ا ج + ۹ ن ب^۲ \} لا^{ن-۳} + \ldots$$

۲۹ — ثنائی سروں کے ساتھ لکھی ہوئی ن ویں درجہ کی مساوات سے دوسری رقم خارج کرو اور ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوتے ہیں اُن کے صدر سر ہیں

$$ھ، \; - ن ھ ع + ۳ (ن - ۲) ا ب ج$$

اِن جملوں کو آسانی کے ساتھ پچھلی مثال سے دفعہ ۳۵ کے استحالہ کی مدد سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ $ا_۲$، $ا_۳$، $ا_۴$ کی قیمتیں مساواتوں

$$ا_۲ = ھ، \; ا^۲ ا_۳ = گ، \; ا^۳ ا_۴ = ا^۲ ع - ۳ ھ^۲$$

سے حاصل ہونگی جہاں $\text{گ}^{۲}$ کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۲۷ کی تماثلہ سے رکھی گئی ہے اور مثبت مضروب فیہ خارج کردئے گئے ہیں۔

۳۰۔ یولر کے کعبی کے لئے اسٹرم کے تفاعل محسوب کرو (دفعہ ۶۱ دیکھو) چند تحویلات کے بعد اور مثبت اجزائے ضربی کو خارج کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ھ}\,\text{لا}^{۲} + ۳\left(\text{ھ}^{۲} - \frac{۱}{۱۲}\,\text{ا}^{۲}\,\text{ع}\right)\text{لا} - \frac{۱}{۴}\,\text{گ}^{۲}$$

$$\text{ف}'(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{۲} - \frac{۱}{۱۲}\,\text{ا}^{۲}\,\text{ع}\,،$$

$$\text{ر}_{۱} \equiv ۲\,\text{ع}\,\text{لا} + ۲\,\text{ھ}\,\text{ع} - ۳\,\text{ا}\,\text{ج}\,،$$

$$\text{ر}_{۲} \equiv \text{ع}^{۳} - ۲۷\,\text{ج}^{۲}$$

چار درجی کی اصلوں کی نوعیت کے متعلق جو شرطیں دفعہ ۶۸ میں حاصل ہوئی ہیں سب کو ان نتیجوں سے مثال ۴ صفحہ ۱۸۷ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اور یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اصلوں کے حقیقی ہونے کے لئے جو شرطیں دفعہ ۱۰۰ اور متذکرۂ صدر دفعہ میں حاصل ہوئی تھیں دونوں یہاں باہم حاصل ہوتی ہیں۔ کیونکہ یولر کے کعبی کی سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونیکے لئے لا کی بجائے صفر درج کرنے سے علامت کی تین تبدیلیاں ملنی چاہئیں اور اسکے لئے اس بات کی ضرورت ہے کہ $\text{ا}^{۲}\,\text{ع} - ۱۲\,\text{ھ}^{۲}$ اور $۲\,\text{ھ}\,\text{ع} - ۳\,\text{ا}\,\text{ج}$ دونوں منفی ہوں۔

---

(242)

بارہواں باب

ملتف اعداد اور ملتف متغیر

۱۱۴ — ملتف اعداد — ترسیمی تعبیر — ابواب گذشتہ میں اکثر ایسی مثالوں سے واسطہ رہا ہے جنمیں عددی مساواتوں کے حل میں ا + ب $\sqrt{-1}$ کے شکل کی مقداریں واقع ہوئی ہیں جو منفی عدد کا جذر المربع نکالنے پر مشتمل ہیں۔ ایسے جملہ کو جسمیں ا مثبت یا منفی حقیقی اکائیاں اور ب مثبت یا منفی خیالی اکائیاں شامل ہوں ملتف عدد کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۵)۔ خیالی اکائی $\sqrt{-1}$ کو اختصاراً خ سے تعبیر کیا جاتا ہے حقیقی اور خالص خیالی اعداد دونوں جملہ ا + خ ب میں شامل ہیں کیونکہ قبل الذکر اعداد یعنی حقیقی اعداد ب = ۰ رکھنے اور ثانی الذکر ا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ ملتف اعداد پر تمام معمولی حسابی اعمال جاری ہو سکتے ہیں اور کسی ایسے حسابی عمل کے نتیجہ میں خ کی ایک سے بڑی صحیح قوتوں کو ربط $خ^۲ = -۱$ کی مدد سے مختصر کیا جا سکتا ہے۔

اب ہم ملتف اعداد کو ہندسی طور پر تعبیر کرنیکا طریقہ واضح کرتے ہیں جو اُن تفاعلوں کے سمجھنے میں بہت سہولت پیدا کر دیگا جنمیں اس قسم کی مقداریں شامل ہوتی ہیں۔

جملہ ا + خ ب کو شکل

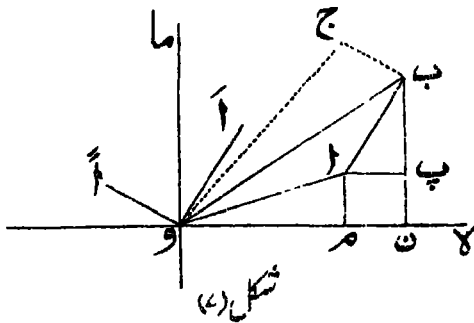
مہ (جم عہ + خ جب عہ)

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\text{مہ} = \sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}،\quad \text{جم عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{مہ}}،\quad \text{جب عہ} = \frac{\text{ب}}{\text{مہ}}$$

مقدار مہ کو ملتف عدد ا + خ ب کا **مقیاس** اور زاویہ عہ کو **سعت** کہتے ہیں۔ مقیاس کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے اور جذر کی منفی علامت سعت کو بقدر π کے بڑھانے کے جواب میں ہے۔

(250

فرض کرو کہ عملی القوائم محور و لا، وما (شکل ۷) لئے گئے ہیں اور ا ایک ایسا نقطہ ہے کہ لا و ا = عہ اور و ا = مہ۔ تب و م = مہ جم عہ = ا اور ا م = مہ جب عہ = ب۔ اس لئے جملہ ا + خ ب کو ترسیمی طور پر اُس خط مستقیم سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جو و سے ا تک کھینچا گیا ہو جس کے محدد ثابت محوروں کے لحاظ سے ا، ب ہیں۔ مبدأ سے اِس نقطہ کا فاصلہ و ا ملتف عدد کے مقیاس کے مساوی ہے اور زاویہ لا و ا اُس کی سعت کے مساوی۔

شکل (۷)

ملتف عدد کی مقدار کا اندازہ اس کے مقیاس کی مقدار سے کیا جاتا ہے۔ جب ملتف عدد معدوم ہوتا ہے (یعنی جب ا اور ب جداگانہ صفر ہوتے ہیں) تو اس کا مقیاس بھی معدوم ہو جاتا ہے اور اس کے برعکس جب مقیاس معدوم ہوتا ہے تو چونکہ $\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} = ۰$، ا اور ب کو جدا جدا صفر ہونا چاہئے اس لئے خود ملتف عدد بھی معدوم ہو جاتا ہے۔ ایسے دو عدد ا + خ ب اور اَ + خ بَ مساوی

ہونگے جبکہ ا = اَ اور ب = بَ یعنی جبکہ ان کے مقیاس باہم مساوی ہوں اور جبکہ سعت یا تو باہم مساوی ہوں یا ۲ π کے ضعف کا فرق رکھیں۔

اختصار کی خاطر آیندہ ا + خ ب کے مقیاس اور سعت کو ترقیم

مق (ا + خ ب)، سعت (ا + خ ب)

سے تعبیر کیا جائیگا۔

۱۱۵ — ملتف اعداد۔ جمع اور تفریق۔ فرض کرو کہ دوسرا ملتف عدد اَ + خ بَ خط مستقیم و اَ سے تعبیر ہوتا ہے اور اسلئے

و اَ = مق (اَ + خ بَ)، لا و اَ = سعت (اَ + خ بَ)

اب ہم حاصل جمع

ا + خ ب + اَ + خ بَ

کو تعبیر کرنیکا طریقہ متعین کرتے ہیں۔

(251) اس مجموعہ کو شکل ا + اَ + خ (ب + بَ) میں لکھنے سے دفعہ ۱۱۴ کی ترقیم کی بموجب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک ایسے خط مستقیم سے تعبیر ہوگا جو مبدا سے اس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جس کے محدد ا + اَ، ب + بَ ہیں۔ اس نقطہ کو معلوم کرنے کے لئے اب کو و اَ کے متوازی اور مساوی کھینچو تو چونکہ اپ، ب پ علی الترتیب اَ، بَ کے مساوی ہیں ب مطلوبہ نقطہ ہے اور

و ب = مق {ا + اَ + خ (ب + بَ)}،

لا و ب = سعت {ا + اَ + خ (ب + بَ)}

اسلئے دو ملتف عددوں کو جمع کرنے کے لئے ہم و ا کھینچتے ہیں جو انمیں سے ایک کو تعبیر کرتا ہے اور اس کے سرے پر اب کھینچتے ہیں جو دوسرے کو تعبیر کرتا ہے (یعنی اس طور پر کہ اسکا طول دوسرے عدد کے مقیاس کے مساوی ہو اور دلا کے ساتھ یہ خط جو زاویہ بنائے

وہ اُس کی سمت کے مساوی ہو)۔ تب و ب اِن دو ملتف عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کریگا۔

اب چونکہ و ب، و ا + ا ب سے بڑا نہیں ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو ملتف عددوں کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ اس کے مساوی) ہوتا ہے۔

اس طریقہ تعبیر کو اس قسم کی مقداروں کی کسی تعداد کا مجموعہ معلوم کرنے میں توسیع دیجاسکتی ہے۔ مثلاً تیسرے ملتف عدد اً + خ بً کو جمع کرنے کے لئے جو و اً سے تعبیر ہوتا ہے ہم ب ج و اً کے متوازی اور مساوی کھینچتے ہیں اور و ج کو ملاتے ہیں۔ تب و ج تین ملتف اعداد و ا، و اَ، و اً کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم عام طور پر یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ملتف مقداروں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مقیاس اِن کے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ مساوی) ہوتا ہے۔

تفریق کو بھی اسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ و ب سے و ا اور و اَ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، و ا سے و ب اور و اَ کا فرق تعبیر ہوگا۔ اس لئے دو ملتف عددوں کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو تعبیر کرنیوالے خط کے سرے پر ہم ایک خط کھینچتے ہیں جو دوسرے عدد کو تعبیر کرنیوالے خط کے متوازی اور مساوی ہے مگر مخالف سمت میں (یعنے ایسی سمت میں جو و لا کے ساتھ دوسرے کی سمت سے بقدر π کے زیادہ بڑا زاویہ بناتی ہے)۔ اس خط کے سرے کو ہم و سے ملاتے ہیں تاکہ دئے ہوئے دو ملتف عددوں کے فرق کو تعبیر کرنیوالا خط ملجائے۔

۱۱۶ ـــ ضرب اور تقسیم ۔ دو ملتف عدد ا + خ ب، اَ + خ بَ کو ضرب دینے کے لئے ان کو ہم اس شکل میں لکھتے ہیں

ا + خ ب ≡ مہ (جم عہ + خ جب عہ)، اَ + خ بَ ≡ مہَ (جم عہَ + خ جب عہَ)

(252)

تو ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے

(ا + خ ب) (اَ + خ بَ) ≡ مہ مہَ {جم (عہ + عہَ) + خ جب (عہ + عہَ)}

جس سے ثابت ہے کہ دو ملتف عددوں کا حاصل ضرب ایک ملتف عدد ہے جسکا مقیاس دونوں مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں کا مجموعہ ۔

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس قسم کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کا حاصل ضرب ایک ملتف مقدار ہے جسکا مقیاس تمام مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت تمام سعتوں کا مجموعہ ۔

ا + خ ب کو اَ + خ بَ سے تقسیم کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

(ا + خ ب) / (اَ + خ بَ) ≡ (مہ / مہَ) {جم (عہ - عہَ) + خ جب (عہ - عہَ)}

جس سے ثابت ہے کہ دو ملتف عددوں کا خارج قسمت ایک ملتف عدد ہے جسکا مقیاس دونوں مقیاسوں کے خارج قسمت کے مساوی ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں کے فرق کے مساوی ۔

دفعہ ۱۱۶ کے مسئلہ کے ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ جب اجزائے ضربی (خیالی یا حقیقی) کی کسی تعداد کا حاصل ضرب معدوم ہوتا ہے تو

ان میں سے ایک جزو ضربی کو معدوم ہونا چاہیئے۔ جب تمام اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو یہ مسئلہ بالکل واضح ہے اور اوپر جو کچھ ثابت ہوا اس سے اسوقت بھی جبکہ اجزائے ضربی ملتف ہوں یہی نتیجہ برقرار رہتا ہے کیونکہ حاصل ضرب کا مقیاس اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جب ان میں سے کوئی جزو ضربی معدوم ہو اور اس لئے وہ ملتف مقدار معدوم ہونی چاہیئے جسکا یہ جزو ضربی مقیاس ہے۔

۱۱۷۔ ملتف عددوں پر دوسرے اعمال۔ پچھلے مسئلوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف عدد کی کوئی صحیح قوت شکل ا + خ ب میں بیان کیجاسکتی ہے جہاں ا اور ب حقیقی ہیں۔ اور زیادہ عام صورت میں اگر کسی منطق صحیح تفاعل

$$ا_{0} ی^{ن} + ا_{1} ی^{ن-1} + \cdots + ا_{ن-1} ی + ا_{ن}$$

میں جس کے سر ملتف (بشمول حقیقی) عدد ہیں ی کی بجائے ملتف مقدار ا + خ ب درج کیجائے تو نتیجہ کو معیاری شکل ا + خ ب میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ (285

اس باب میں ملتف عددوں کے ایسے تفاعلوں پر بحث کرنا مقصود نہیں ہے جو منطق صحیح تفاعلوں کی اس نوع میں داخل نہیں ہیں جس سے ہمیں ابتک واسطہ رہا ہے۔ لیکن ڈیمو ایر کے مسئلہ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ علم الحساب کے بقیہ اعمال سے ہر صورت میں مثلاً کسری یا ملتف قوت نما پر اٹھانے لوگارتم لینے اور ان قوتوں پر اٹھانے سے جن کی اساس اور قوت نما دونوں ملتف ہوں ایک ملتف عدد ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ ملتف عدد ایک ایسا نظام یا گروہ بناتے ہیں جو خود مکمل ہے۔

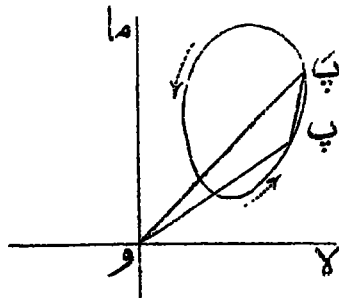
۱۱۸۔ ملتف متغیر۔ اس کتاب کے ابتدائی ابواب میں کثیر الارقام کے

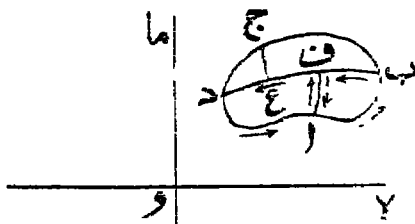
تغیر کا مطالعہ متغیر ی کی − ∞ سے + ∞ تک حقیقی قیمتوں میں سے گذرنے کے جواب میں کیا گیا تھا اور کثیر الارقام کی شکل کو ایک منحنی کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کیا گیا تھا۔ یہ فی الحقیقت اُس عام کثیر الارقام کی ایک خاص صورت ہے جس پر اب بحث کیجائیگی۔

فرض کرو کہ ی میں ایک منطق اور صحیح تفاعل دیا گیا ہے جس کے سر حقیقی یا ملتف عدد ہیں یعنی

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv \text{ا}_0\,\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\,\text{ی}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ی} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

ہم اس کے تغیرات کا مطالعہ ی کی مختلف قیمتوں کے جواب میں کر سکتے ہیں جہاں ی ملتف شکل لا + خ ما میں ہے اور جہاں لا اور ما دونوں تمام ممکن حقیقی قیمتیں اختیار کرتے ہیں۔ اس شکل لا + خ ما کو ہم ملتف متغیر کہینگے۔ ظاہر ہے کہ اس متغیر کی تمام ممکن حقیقی قیمتیں لا + خ ما کی قیمتوں میں شامل ہیں کیونکہ یہ وہ قیمتیں ہیں جو لا کو بدلنے اور ما = ۰ رکھنے سے پیدا ہوتی ہیں۔ دفعہ ۱۱۴ کے اصولوں کی بموجب ہم ملتف متغیر لا + خ ما کو خط و پ (شکل ۸) سے تعبیر کر سکتے ہیں جو ایک ثابت نقطے و سے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہے جس کے محدد لا، ما ہیں۔ یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ لا + خ ما نقطہ پ سے تعبیر ہوتا ہے۔

(254)

اِس طور پر لا + خ ما کی تمام ممکن قیمتیں مستوی میں کے تمام نقطوں سے تعبیر ہونگی۔ اب چونکہ ی کی کسی مخصوص قیمت کے لئے ف (ی)

تغیر کی ایک خاصیت اخذ کر سکتے ہیں جو آئندہ مشاہدات میں اہم ثابت ہوگی
فرض کرو کہ ایک مستوی رقبہ خطوط ب د، اف، ع ج وغیرہ
سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے (شکل ۹) تو پورے رقبہ کے محیط
کے لحاظ سے سعت کا تغیر جزوی رقبوں کے محیطوں کے لحاظ (235)
سے اس کے تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جہاں یہ فرض
کر لیا گیا ہے کہ تمام رقبے متغیر کے ایک ہی سمت میں حرکت کرنے سے
مرتسم ہوئے ہیں۔ یہ نتیجہ بدیہی ہے کیونکہ جب نقطہ تمام رقبوں کو ایک ہی
جہت میں مرتسم کرتا ہے تو تقسیم کرنیوالے اندرونی خطوں میں سے ہر ایک
دوبار مرتسم ہوتا ہے مگر مخالف سمتوں میں اور بیرونی محیط صرف ایک مرتبہ
مرتسم ہوتا ہے پس سعت کا مجموعی تغیر تقسیم کرنیوالے خطوں کے لحاظ سے
صفر کے مساوی ہے اور بیرونی محیط کے لحاظ سے اسکا جو تغیر ہے
صرف وہی باقی
رہتا ہے۔ مثال
کے طور پر شکل میں
رقبوں اب ف،
اف د پر غور
کرو۔ جب نقطہ
ان رقبوں کو تیروں

شکل (۹)

سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرتسم کرتا ہے تو اف کے لحاظ سے مجموعی
تغیر صفر ہے۔

۱۱۹۔ ملتف متغیر کے تفاعل کا تسلسل۔

فرض کرو کہ ملتف
متغیر ی ایک ثابت قیمت ی سے شروع کر کے ایک چھوٹا اضافہ
ھ ≡ غہ (جم فہ + خ جب فہ) حاصل کرتا ہے۔ تب اگر ف (ی) دیا ہوا

تفاعل ہو تو دفعہ ۶ کے پھیلاؤ میں لا کی بجائے ی رکھنے سے

$$ف(ی) = ف(ی_. + ھ) = ف(ی_.) + فَ(ی_.)ھ + \frac{فً(ی_.)}{۱ \times ۲}ھ^۲ + \ldots$$

اور ف (ی) میں اضافہ جو ف (ی. + ھ) ـ ف (ی.) کے مساوی ہے

$$فَ(ی_.)ھ + \frac{فً(ی_.)}{۱ \times ۲}ھ^۲ + \frac{فً(ی_.)}{۱ \times ۲ \times ۳}ھ^۳ + \ldots\ldots$$

ہوگا۔

اس جملہ میں ھ کی قوتوں کے سر سب کے سب معمولی شکل کے ملتف جملے ہیں اور اگران کے مقیاس ا، ب، ج وغیرہ ہوں تو متواتر رقموں کے مقیاس ا غہ، ب غہ^۲، ج غہ^۳، وغیرہ ہیں اور چونکہ دفعہ ۱۱۵ کی رو سے مجموعہ کا مقیاس، مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (ی) کے اضافہ کا مقیاس

$$ا\,غہ + ب\,غہ^۲ + ج\,غہ^۳ + \ldots\ldots$$

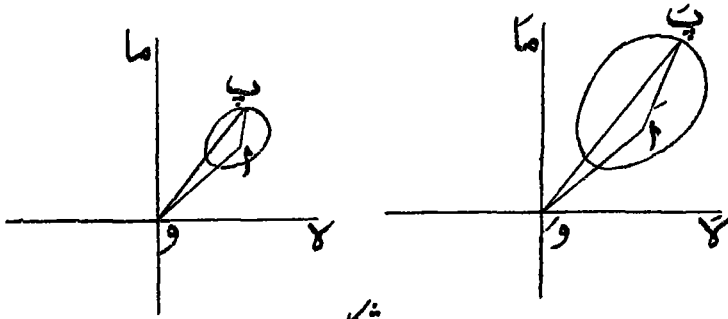
سے کم ہے۔

اب غہ کو ایسی قیمت دیجا سکتی ہے (دفعہ ۵) جس کے لئے یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے اس جملہ کی قیمت کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف متغیر کے لا انتہا چھوٹے تغیر کے جواب میں (یعنے اس تغیر کے جواب میں جس کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو) تفاعل میں بھی لا انتہا چھوٹا تغیر واقع ہوتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر

تفاعل ملتف متغیر کے تغیر کے ساتھ ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔

۱۲۰۔ ف (ی) کی سعت کا تغیر جب ملتف متغیر ایک چھوٹا بند منحنی مرتسم کرے۔ ی کی قیمتوں کے ایک مسلسل سلسلہ کے

(25)

جواب میں ف (ی) کی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ ملتا ہے جنکو خود ی کی قیمتوں کی طرح، ایک مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ نقطوں کے اِن سلسلوں کو ہم ایک دوسرے سے قریب دو شکلوں سے تعبیر کرتے ہیں (شکل ۱۰) جنکے متعلق یہ فرض کرلیا جاسکتا ہے کہ

شکل (۱۰)

وہ مختلف مستویوں پر کھینچے گئے ہیں تاکہ غلط فہمی واقع نہ ہو۔

لا + خ ما کو تعبیر کرنے والے ہر نقطہ پ کے جواب میں ف (ی) کو تعبیر کرنیوالا ایک معین نقطہ پَ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے جب، پ، ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے تو پَ بھی ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے اور جب، پ، ایک بند منحنی کو مرتسم کرنے کے بعد اپنے ابتدائی مقام پر لوٹتا ہے تو پَ بھی اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے۔

فی الحال ہمارا مقصد ف (ی) کی سعت کے تغیر پر بحث کرنا ہے جبکہ، پ ایک بند منحنی مرتسم کرے۔ فرض کرو کہ ا کوئی معین نقطہ ہے جس کے محدد لا، ما، یعنی ی. = لا. + خ ما. ہیں۔ ہم بحث کو دو صورتوں میں تقسیم کرتے ہیں:۔

(۱) جبکہ لا. + خ ما.، ف (ی) = . کی اصل نہ ہو یعنی جبکہ ف (ی.) سے مختلف ہو۔

(۲) جبکہ لا + خ ما، ف (ی) = ۰ کی اصل ہو یا ف (ی.) = ۰
پہلی صورت میں نقطہ ا کے جواب میں ایک نقطہ اَ ایسا موجود ہوتا ہے جو ف (ی.) کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے اور وَ اَ صفر سے مختلف ہوتا ہے۔ فرض کرو ی = ی. + ھ جہاں ھ = غہ (جم فہ + خ جب فہ) اور مان لو کہ پ جو ی کو تعبیر کرتا ہے ایک چھوٹا بند منحنی ا کے گرد مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ پَ، ف (ی) کو تعبیر کرتا ہے تو اَپَ ـــ ف (ی) کا اضافہ، ی کے اضافہ اپ کے جواب میں تعبیر ہوگا۔ اب دفعہ ماسبق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ غہ کو اتنی چھوٹی قیمتیں دیجا سکتی ہیں کہ ف (ی) کے اضافہ کا مقیاس یعنے اَپَ ہمیشہ کسی مقررہ مقدار وَ اَ سے چھوٹا ہو۔ پس یہ فرض کرلیا جا سکتا ہے کہ پ، ا کے گرد اتنا چھوٹا بند منحنی مرتسم کرتا ہے کہ اس کے متناظر پَ سے مرتسم شدہ بند منحنی وَ کے باہر ہو۔ اسلئے دفعہ ۱۱۸ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ سے اگر ایک چھوٹا بند منحنی مرتسم ہو جسمیں کوئی ایسا نقطہ شامل نہیں ہے جو ف (ی) = ۰ کو پورا کرتا ہے تو ف (ی) کی سعت کا کل تغیر کچھ نہیں ہوتا۔

(۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ لا. + خ ما. مساوات ف (ی) = ۰ کی ایک اصل ہے جو م مرتبہ تکرار پاتی ہے اور فرض کرو کہ

$$ف (ی) = (ی - ی.)^م \; پہ (ی)$$

تب

$$ف (ی) = ھ^م \; پہ (ی) = غہ^م (جم م فہ + خ جب م فہ) \; پہ (ی)$$

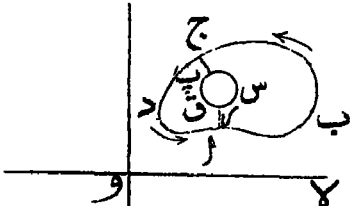
اس صورت میں وَ اَ = ۰۔ اور جب پ، ا کے گرد ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے تو پ اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہوتا ہے اور ف (ی) کی سعت بقدر ۲ π م کے ضعف کے بڑھ جاتی ہے جسکو طریقہ

ذیل پر متعین کیا جا سکتا ہے :- مساوات بالا سے

سعت ف (ی) = م فہ + سعت پہ (ی)

اور سعت ف (ی) کا اضافہ، م فہ کے اضافہ میں سعت پہ (ی) کا اضافہ جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اب یہ دوسرا اضافہ (ا) کی رو سے کچھ نہیں کیونکہ پ سے جو بند منحنی مرتسم ہوتا ہے اس کے متعلق یہ فرض کر لیا جا سکتا ہے کہ اس میں پہ (ی) = ۰ کی کوئی اصل شامل نہیں ہے۔ اور چونکہ فہ کا اضافہ، پ کی ایک گردش میں ۲ ٦ ہوتا ہے اس لئے م فہ کا اضافہ ۲ م ٦ ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب، پ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے جسمیں مساوات ف (ی) = ۰ کی ایک اصل م رتبہ والی شامل ہے تو ف (ی) کی سعت میں بقدر ۲ م ٦ کے اضافہ ہوتا ہے۔ (258)

۱۲۱ ــ کوشی کا مسئلہ۔ جب، ی، ایک مستوی میں ایک ہی خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے تو اس کے جواب میں ف (ی) اپنے مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے اور سعت ف (ی) میں مساوی اور مخالف تغیرات واقع ہوتے ہیں۔ اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مستوی رقبہ کو دفعہ ۱۱۸ کی طرح حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سعت ف (ی) کا تغیر جو اسی جہت میں ی سے مرتسم شدہ تمام جزوی رقبوں کے جواب میں ہے سعت ف (ی) کے اس تغیر کے مساوی ہوگا جو ی سے مرتسم شدہ بیرونی محیط کے جواب میں ہے۔ اب فرض کرو کہ مستوی ی ما کیں کوئی محیط مرتسم ہوا ہے اور پہلے یہ فرض کرو کہ اس میں ایسا کوئی نقطہ شامل نہیں ہے جو مساوات ف (ی) = ۰ کو پورا کرتا ہو۔ اسکو متعدد چھوٹے رقبوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جنمیں سے ہر ایک کے لئے دفعہ ۱۲۰ کی

صورت (۱) کے نتائج قائم رہتے ہیں اور جو کچھ کہ ابھی ثابت کیا گیا ہے، اُس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سعت ف (ی) کا تغیر جو ی سے مرتسم شدہ بند محیط کے جواب میں ہے کچھ نہیں ہے۔

شکل (۱۱)

دوسرے یہ فرض کرو کہ بند محیط میں ایسا نقطہ شامل ہے جو مساوات ف (ی) = ۰ کی اصل ہے اور یہ اصل م مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ فرض کرو کہ اس نقطہ کے گرد ایک چھوٹا بند منحنی پ ق ر س کھینچا گیا ہے۔ اب ف (ی) کی سعت کا تغیر جو ی سے مرتسم شدہ پورے محیط کے متناظر ہے اسکے ان تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جو قوسوں ا ب ج پ س ر ج د ا ر ق ب، پ ق ر س کی ترسیم کے متناظر ہیں۔ پہلے دو تغیرات جو کچھ کہ اوپر ثابت ہوا اُس کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور آخر کا تغیر، دفعہ ۱۲۰، (۲) کی رو سے ۲ م π کے مساوی ہے۔ پس ف (ی) کا مجموعی تغیر ۲ م π ہے۔ اسی طرح اگر رقبہ میں ایسے اور نقطے بھی شامل ہوں جو مَ، مً، وغیرہ مرتبہ تکرار پانیوالی اصلوں کے جواب میں ہیں تو مجموعی تغیر = ۲ (م + مَ + مً + ...) π ۔ پس ہم مسئلہ ذیل پر پہنچتے ہیں جو کوشی سے منسوب کیا جاتا ہے :-

ایک دئے ہوئے رقبہ کے اندر کسی کثیر الارقام کی اصلوں کی تعداد، اس کثیر الارقام کی سعت کے مجموعی تغیر کو جو ملتف متغیر سے اُس رقبہ کے محیط کی مکمل ترسیم کے جواب میں ہے ۲ π سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۲۲ — عام مساوات کی اصلوں کی تعداد — دفعات ماسبق کے ثابت شدہ اصولوں کی مدد سے ہم وہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں جس کا ذکر دفعات ۱۵ اور ۱۶ میں کیا گیا تھا یعنے ہر ن ویں درجہ کی منطق اور مکملہ مساوات کی ن خیالی یا حقیقی اصلیں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ی کا منطق اور مکملہ تفاعل

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv \text{ا}_{۰}\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\text{ی}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\text{ی}^{\text{ن}-۲} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\text{ی} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

ہے۔ اب سوائے اس مفروضے کے کہ ف (ی)، متغیر کی کسی لا متناہی قیمتوں کیلئے معدوم نہیں ہو سکتا ف (ی) = ۰ کی اصلوں کے وجود کے متعلق کوئی اور مفروضہ اختیار کئے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ ی اپنے مستوی میں اتنا بڑا دائرہ مرتسم کرتا ہے کہ اس کے باہر کوئی اصل وجود نہیں رکھتی۔ تب اگر

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv \text{ی}^{\text{ن}}\left\{\text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\text{یَ} + \text{ا}_{۲}\text{یَ}^{۲} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{یَ}^{\text{ن}}\right\}$$

$$= \text{ی}^{\text{ن}}\,\text{فہ}(\text{یَ})\text{، جہاں } \text{یَ} = \frac{۱}{\text{ی}}$$

تو یَ جسکا مقیاس ی کے مقیاس کا متکافی ہے ایک چھوٹا دائرہ مرتسم کریگا جسمیں اِس مستوی کا ایک ایسا حصہ شامل ہوگا جو ی سے مرتسم شدہ دائرہ کے باہر واقع ہونیوالے ملتف متغیری کے میدان کے جواب میں ہے اور اس لئے ف (یَ) = ۰ کی کوئی اصل اس چھوٹے دائرہ کے اندر واقع نہیں ہوگی۔ پس ی سے پورے دائرہ کی ترسیم کے جواب میں ف (یَ) کی سعت کا تغیر = ۰ اور اس لئے

ف (ی) کی سعت کا تغیر = $\text{ی}^{\text{ن}}$ کی سعت کا تغیر

اور اگر

ی = ر (جم طہ + خ جیب طہ) یا یⁿ = رⁿ (جم ن طہ + خ جیب ن طہ)

تو طہ بقدر ۲ π کے بڑھ جاتا ہے اور اس لئے یⁿ کی سعت بقدر ۲ ن π کے بڑھ جاتی ہے۔

اب کوشی کے مسئلہ (دفعہ ۱۲۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ی سے مرتسم شدہ دائرہ۔ کے اندر اصلوں کی تعداد یعنے مساوات ف (ی) = ۰ کی کل اصلوں کی تعداد ن ہے اور مسئلہ ثابت ہو چکا۔ (26)

اس طرح وہ مسئلہ جس کا ثبوت دفعہ ۱۵ میں ملتوی کر دیا گیا تھا کوشی کے مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔ اس لئے کوشی کے مسئلہ کو مساواتوں کے نظریہ میں بنیادی مسئلہ قرار دیا جا سکتا ہے۔ تاہم یہ دیکھنا واجب ہے کہ دفعہ ۱۵ کے مسئلہ کو یعنی ہر عددی مساوات کی ایک عددی اصل ہوتی ہے بالراست کوشی کے مسئلہ کی مدد کے بغیر اُن اصولوں کے ذریعہ ثابت کیا جا سکتا ہے جو دفعہ ۱۱۹ اور دفعات ماقبل میں مذکور ہیں۔ چنانچہ ہم اب اسکو اسی طرح ثابت کرینگے۔

۱۲۳ — بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ی کی کوئی قیمت ایسی نہیں ہے جو ف (ی) کو معدوم کرتی ہو۔ اور فرض کرو کہ قیمت ی جو نقطہ أ سے تعبیر ہوتی ہے (شکل ۱۰) مبدا و سے پ سے قریب ترین ممکن محل أ کے جواب میں ہے۔ اب ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ اضافہ ھ کو ایسی سمت دیجا سکتی ہے کہ پ ایسے محل میں آجائے جو مبدا سے أ کی بہ نسبت قریب تر ہو۔

ہم حسب ذیل پھیلاؤ جانتے ہیں (دفعہ ۱۱۹):—

$$ف(ی+ھ) = ف(ی) + فَ(ی)ھ + \frac{فً(ی)}{۱ \times ۲}ھ^۲ + \ldots\ldots + ا ھ^ن$$

بموجب فرض ف(ی) معدوم نہیں ہوتا لیکن مشتق تفاعلوں فَ(ی)، فً(ی) وغیرہ میں سے ایک یا زیادہ معدوم ہو سکتے ہیں فرض کرو کہ ان میں سے پہلا تفاعل جو معدوم نہیں ہوتا ف م(ی) ہے اور فرض کرو کہ

$$\frac{\text{ف}_{\text{م}}(\text{ی})}{1\times 2\times 3\times \ldots\times \text{م}} = \text{مہ}^{\text{م}}(\text{جم عم} + \text{خ جب عم})$$

اور اس کے بعد آنیوالے سروں کے لئے بھی اسی کے متناظر جملے فرض کرلو۔ ھ^م کے بعد آنیوالی سب رقموں کو ایک ملتف جملہ میں اکٹھا کرکے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ف}(\text{ی}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{ی}) + \text{مہ}_{\text{م}}\,\text{غہ}^{\text{م}}\{\text{جم}(\text{م فہ} + \text{عم}) + \text{خ جب}(\text{م فہ} + \text{عم})\} + \text{مہ}(\text{جم ظہ} + \text{خ جب ظہ})$$

جہاں دفعہ ۱۱۵ کی رو سے

$$\text{مہ} < \text{مہ}_{\text{م}+1}\,\text{غہ}^{\text{م}+1} + \text{مہ}_{\text{م}+2}\,\text{غہ}^{\text{م}+2} + \ldots\ldots + \text{مہ}_{\text{ن}}\,\text{غہ}^{\text{ن}}$$

(261) دفعہ ۵ کے مسئلہ سے یہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے کہ غہ کو ایسی قیمت دیجا سکتی ہے جس کے لئے $\text{مہ} < \text{مہ}_{\text{م}}\,\text{غہ}^{\text{م}}$۔ اب اضافہ ھ کی سمت مساوات $\text{م فہ} + \text{عم} = \text{کا وَ اَ} + \pi$ سے (شکل ۱۰) ایسی منتخب کیجا سکتی ہے جو ف(ی + ھ) کی قیمت کے دوسرے جملہ کے بنا پر پ کو سمت اَوَ میں مبداء سے بقدر فاصلہ $\text{مہ}_{\text{م}}\,\text{غہ}^{\text{م}}$ کے قریب تر لائے۔ فرض کرو کہ وَ اَ پر س وہ نقطہ ہے جہاں پ اس طریقہ سے لایا گیا ہے۔ ف(ی + ھ) کی قیمت میں جو آخری جملہ ہے اس کا اثر یہ ہوگا کہ پ کو نقطہ س سے حرکت دیکر نقطہ ت تک اس طور پر لائے کہ س ت = مہ اور خواہ اس

حرکت کی سمت کچھ ہی ہو یعنی خواہ سمت خط کچھ ہی ہو ق ت < ق ا
کیونکہ س ت < س ا ۔ پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ ا مبدا کے
لحاظ سے پ کا قریب ترین ممکن محل نہیں ہے اور اسی طرح یہ ثابت
ہو سکتا ہے کہ صفر سے مختلف کوئی اور دوسری قیمت ف (ی) کے
مقیاس کی کم سے کم ممکن قیمت نہیں ہو سکتی ۔

اس ثبوت میں جو اوپر دیا گیا ہے صرف یہ بتایا گیا ہے کہ مساوات
کی اصل ہونی چاہیئے لیکن اصلوں کی ٹھیک تعداد متعین نہیں کی گئی
جیسا کہ اُس ثبوت میں کی گئی ہے جسکا ماخذ کوشی کا مسئلہ ہے ۔ تاہم جب
یہ ثابت کر دیا گیا کہ کم از کم ایک اصل موجود ہونی چاہیئے تو ثبوت کی
تکمیل آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۲ کے طریقہ سے ہو سکتی ہے ۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب ی کی کسی مخصوص قیمت کیلئے
ف (ی) معدوم نہیں ہوتا تو ف (ی) کے اضافہ کو ھ کے ساتھ
جو نسبت ہے اس کی انتہائی قیمت مستقل ف (ی) = م (جم ع
پ خ جم ... [illegible] ... ہو سکتا ہے کہ ان
دونوں اضافوں کا درمیانی زاویہ مستقل ہوتا ہے اور ان کے مقیاس
مستقل نسبت رکھتے ہیں ۔ اس کو عام طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے کہ
(پ اور پ) سے مرتسم شدہ شکلیں اپنے لا انتہا چھوٹے حصوں میں
ایک دوسرے کے متشابہ ہیں ۔

اس دفعہ کے مضمون پر مزید تحقیق مطلوب ہو تو کتاب کے
آخر میں نوٹ ج کا مطالعہ کیا جائے ۔

۱۲۴ ۔ ملتف عددی اصلوں کی تعیین ۔ کیعی کا حل ۔

مساواتوں کے نظریہ پر جو تصنیفات موجود ہیں اُن میں مساواتوں کی
ملتف عددی اصلوں کو عملی طور پر متعین کرنے کی طرف بہت کم توجہ
کی گئی ہے اور نہ یہ آسان ہے کہ ابتدائی درسی کتاب میں جسمیں عام

طریقے درج ہوں اسکی وضاحت خاطر خواہ کیجا سکے۔ نظری طور پر اس مسئلہ میں کوئی اشکال نہیں کیونکہ اگر ف (لا + خ ما) کے حقیقی اور (262)
خیالی حصے جداگانہ صفر کے مساوی رکھے جائیں اور محصلہ دو مساواتوں سے کسی ایک متغیر کو ساقط کر دیا جائے تو ایک مساوات حاصل ہوگی جس سے دوسرے متغیر کی حقیقی قیمت ہارنر کے عمل سے محسوب کیجا سکتی ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طریقہ کی عملی قدر و قیمت کچھ بھی نہیں ہے*۔

ہم اس دفعہ اور دفعات آیندہ میں اپنی توجہ صرف کعبی اور چارُدرجی مساواتوں تک محدود رکھینگے جن کے سر حقیقی اعداد ہوں۔ ان مثالوں میں صرف اُس عمل حسابی کو پیش کیا جائیگا جو عملی مقاصد کے لئے سادہ ترین شکل رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ حل کے لئے مساوات

ف (لا) ≡ لا^{۳} + ف لا^{۲} + ق لا + ر = ۰

تجویز کیگئی ہے۔ اس کی اصلوں کو ع، ھ + ک، ھ - ک مان لیا جاسکتا ہے جنمیں ع حقیقی ہے اور باقی اصلوں کی نوعیت خود اثنائے

* طالب علم اگر ماہرین ریاضی کی اُن کوششوں کا مطالعہ کرنا چاہیں جو انہوں نے عددی مساواتوں کی ملتف اصلوں کو دریافت کرنیکے لئے کی ہیں تو وہ حسب ذیل کتابوں سے مدد لے سکتے ہیں۔ ۱۔ لگرانج:۔ مقالہ برائے حلِ عددی مساوات۔ ۲۔ مُرقی:۔ جبری مساواتوں کا نظریہ ۳۔ سائمن سپُینزا:۔ عددی مساواتوں کا عام حل (ویں ۱۸۵۱ء) ۴۔ پی۔ سی۔ یلینگ:۔ اعلیٰ عددی مساواتوں کا حل (مطبوعہ لائپزگ ۱۸۶۵ء) ایمری ملیا کلنوٹک:۔ وقت واحد میں کسی مساوات کے تمام اصلوں کو دریافت کرنے کا طریقہ۔ (امریکن جرنل آف میتھمیٹکس جلد ۱۷ شمارہ ۱ و ۲) ۶۔ ایم۔ ای۔ کارو الو:۔ "جبری یا ماورائی مساواتوں کا مکمل عددی حل دریافت کرنے کا عملی طریقہ" (مطبوعہ پیرس ۱۸۹۶ء)۔

عمل حساب میں معلوم ہو جائے گی کیونکہ ک کی تعیین اس کے مربع سے ہوتی ہے جو ممکن ہے منفی ہو یا مثبت ۔ مساوات کی کوئی ابتدائی تحلیل ضروری نہیں ۔ اگر لا کی بجائے ھ + ک درج کیا جائے اور ک کی جفت اور طاق قوتوں کے مجموعوں کو جداگانہ صفر کے مساوی رکھا جائے (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۲۲۲) تو ہمیں فوراً ذیل کی مساوات ملجاتی ہے :۔

- ک۲ = فَ (ھ) = ۳ ھ۲ + ۲ ف ھ + ق

نیز ک ساقط کرنے سے ھ کو متعین کرنے کے لئے ایک کعبی مساوات حاصل ہوتی ہے لیکن اس مساوات کو بنانے کی ضرورت نہیں پڑے گی کیونکہ ھ کو سب سے زیادہ آسان طریقہ سے مساوات عہ + ۲ ھ = - ف سے معلوم کیا جا سکتا ہے جبکہ عہ کو سب سے پہلے ہارنر کے طریقہ سے حسب معمول دریافت کرلیا گیا ہو ۔

آخر میں ک کا محسوب کرنا ضروری ہے اور اس کے ساتھ باقی دو اصلوں کا خواہ وہ خیالی ہوں یا حقیقی ۔ اس مقصد کیلئے ذیل کا طریق عمل سہولت بخش ہوگا :۔

سروں کے رقوم میں ≡ فَ (عہ) کی قیمت ف۲ - ۳ ق ہے یعنی

فَ (عہ) + فَ (ھ + ک) + فَ (ھ - ک) = ف۲ - ۳ ق

نیز فَ (ھ + ک) + فَ (ھ - ک) = ۲ فَ (ھ) + ٦ ک۲

اسلئے فَ (عہ) + ۴ ک۲ = ف۲ - ۳ ق

جس سے ک۲ کو بہت تھوڑی محنت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے کیونکہ فَ (عہ) کی عددی قیمت ، ہارنر کے تکمیل یافتہ عمل میں جو آخری استحالہ ہے اس میں آخر سے دوسرے سر سے

(263

-۳٫۵۶۷۰۲ ± ۰٫۹۵۲۴ √-۱

۲ — نیوٹن کے کعبی (دیکھو دفعہ ۱۰۷)

لا^۳ - ۲لا - ۵ = ۰

کو پوری طرح حل کرو۔

ہارنر کے طریقہ سے چار استحالوں کی تکمیل کرنے اور مثال ماسبق کی طرح عمل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں ع = ۲٫۰۹۴۵۵ اور

ف' (ع) = ۱۱٫۱۶۰۷۸

پس ک^۲ = -۱٫۲۹۰۱۹۵

اور باقی دو اصلیں (جنکا خیالی ہونا ثابت ہے) حاصل ہوتی ہیں

-۱٫۰۴۷۲۷ ± ۱٫۱۳۵۹۴ √-۱

۳ — دفعہ ۱۰۹ صفحہ ۳۴۹ کی مثال ۱

لا^۳ + لا^۲ + لا - ۱۰۰ = ۰

کی باقی دو اصلیں معلوم کرو۔

ہم حاصل کرتے ہیں

ف' (ع) = ۶۴٫۰۸۴۱، ک^۲ = -۱۲٫۶۵۲۱۰۲

اور مطلوبہ اصلیں ہیں

-۲٫۶۳۲۲ ± ۳٫۵۴۶ √-۱

۴ — مساوات

۲۰لا^۳ - ۲۴لا^۲ + ۳ = ۰

کو حل کرو۔

۲۰ سے تقسیم کرو اور مساوات لا^۳ - ۱٫۲ لا^۲ + ۰٫۱۵ = ۰ کی وہ اصل ہارنر کے طریقہ سے معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے تو معلوم ہوگا کہ ع = ۰٫۴۴۶۰۳۶۶ اور ف' (ع) = -۰٫۴۷۳۶۴ اس لئے

۴ک^۲ = ف^۲ - ۴ق - ف' (ع) = ۱٫۴۴ + ۰٫۴۷۳۶۴

پس ک۲ = ۴۷۰۸۴۱، اور اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں۔ ہم حاصل کرتے ہیں ھ = ۳۰۶۹۸، اور ک کو جمع اور تفریق کرنے سے یہ دوسری اصلیں معلوم ہوتی ہیں ۱۰۰۶۸۶۵ اور - ۳۱۴۶۹، (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۰۲)۔

۵ — لگرانج کے کعبی

لا۳ - ۷لا + ۷ = ۰

کو پوری طرح حل کرو۔

تمام اصلوں کی علامتیں بدلو اور استحالہ شدہ مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصل عہ معلوم کرو جو ۳ اور ۴ کے درمیان ہے تو

عہ = ۳۰۴۸۹۱۷۳، اور ف(عہ) = ۳۷۰۸۸۷۰۲

پس ک۲ = ۵۰۲۸۱۵۷۵، اور ک = ۱۶۷۸، نیز ھ = -۱۵۲۴۴۵۸۰، اور ان سے ھ + ک اور ھ - ک کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔ اس طور پر حاصل کردہ سب اصلوں کی علامتیں بدلنے سے دی ہوئی مساوات کی اصلیں حاصل ہوتی ہیں

- ۳۰۴۸۹، ۱۰۳۵۶۶، ۱۰۶۹۲۲، (دیکھو مثال ادقعہ ۱۱)

اوپر جو مثالیں دی گئی ہیں وہ یہ بتانے کے لئے کافی ہیں کہ اصلوں کی نوعیت کی قبل از قبل جانچ کئے بغیر کس طرح دئے ہوئے کعبی کو حل کیا جا سکتا ہے۔ یہ تصفیہ کرنے کے لئے کہ کعبی کی دو دوسری دو اصلیں حقیقی ہیں یا خیالی جو محنت برداشت کرنی پڑتی ہے وہ اس محنت سے کچھ ہی زیادہ ہے جو اسٹرم کے مسئلہ کو استعمال کرنے میں لاحق ہوتی ہے اور وہ مزید محنت جو اصلوں کو واقعی طور پر معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے بہت خفیف ہے۔ اب ہم چار درجی مساوات پر غور کرینگے۔

(265)

۱۲۵ — چار درجی کا حل۔ جب چار درجی کی اصلیں (دو یا چار) حقیقی ہوں تو اسکو بھی دفعہ ماسبق میں بیان کردہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے

حل کیا جا سکتا ہے۔ بعض مثالوں میں حقیقی اصل کے وجود کو فوراً پہچان لیا جا سکتا ہے اور جب ایسی صورت ہو تو مساوات کے مکمل حل کے لئے طریقہ ذیل کا استعمال کرنا فائدہ مند ہوگا۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^4 + \text{ف}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س} = ۰$$

اور اسکی حقیقی اصلیں ہیں ع، یہ۔ باقی دو اصلوں کو ھ + ک اور ھ - ک سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس آخری زوج کے متعلق کسی قسم کا مفروض اختیار نہیں کیا گیا۔ فرض کرو کہ ع اور یہ دونوں کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے اور فَ(ع) اور فَ(یہ) کی عددی قیمتیں بھی دفعہ ماسبق کی طرح معلوم کر لی گئی ہیں۔ اب اگر ف(لا) میں لا کی بجائے ھ + ک درج کیا جائے اور مثال ۲۶ صفحہ ۳۰۴ کا طریق حل استعمال کیا جائے تو بلا تکلف حاصل ہوتا ہے

$$-\text{ک}^2 = \frac{۶\,\text{فَ}(\text{ھ})}{\text{فَ}'''(\text{ھ})} = \frac{۴\text{ھ}^3 + ۳\text{ف}\,\text{ھ}^2 + ۲\text{ق}\,\text{ھ} + \text{ر}}{۴\text{ھ} + \text{ف}}$$

پھر جیسا کہ ثابت کیا جا چکا ہے

$$\text{فَ}(\text{ع}) + \text{فَ}(\text{یہ}) + \text{فَ}(\text{ھ}+\text{ک}) + \text{فَ}(\text{ھ}-\text{ک}) = -\text{ف}^3 + ۴\text{ف}\,\text{ق} - ۸\text{ر}،$$

اور

$$\text{فَ}(\text{ھ}+\text{ک}) + \text{فَ}(\text{ھ}-\text{ک}) = ۲\text{فَ}(\text{ھ}) + \text{فَ}'''(\text{ھ})\,\text{ک}^2،$$

اسلئے

$$-۴\text{ک}^2(۴\text{ھ} + \text{ف}) = \text{فَ}(\text{ع}) + \text{فَ}(\text{یہ}) + \text{ف}^3 - ۴\text{ف}\,\text{ق} + ۸\text{ر}،$$

اس ضابطہ کو ک^2 کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے جبکہ ھ کی قیمت پہلے سے ہی مساوات ع + یہ + ۲ھ = - ف سے حاصل کر لی گئی ہو۔ پھر اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے کہ اصلوں کا دوسرا زوج خیالی ہے یا حقیقی بموجب اسکے کہ ک^2 منفی ہے یا مثبت۔

مثالیں

(26

۱ ــــ مساوات

$$لا^{۴} - ۳لا^{۳} + ۷لا^{۲} - ۱۰لا + ۱ = ۰$$

کو پوری طرح حل کرو۔

یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ایک حقیقی اصل صفر اور ایک کے درمیان وجود رکھتی ہے۔ اس لئے ایک دوسری حقیقی اصل بھی ہونی چاہیئے جسکا ۱ اور ۔ ۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ہارنر کے عمل سے ہم حاصل کرتے ہیں

عہ = ۰٫۱۰۷۷۶۷، یہ = ۱٫۹۲۳۲۶۲،

$ف'$(عہ) = ۔ ۸٫۵۹۰۷۸، $ف'$(یہ) = ۱۲٫۰۹۱۳۳

اسلئے　$ف'$(عہ) + $ف'$(یہ) + $ف^{۳}$ ۔ ۴ف ق + ۸ ر = ۔ ۱۹٫۴۹۹۴۵

نیز عہ، یہ اور ف کی قیمتوں سے ھ = ۰٫۴۸۴۴۸۵۔ اور ۴ھ + ف = ۔ ۱۰٫۶۲۰۶ ۔ پس

$$- ۴ک^{۲} = \frac{۱۹٫۴۹۹۴۵}{۱٫۰۶۲۰۶}$$

اب یہ ثابت ہو گیا کہ باقی دو اصلیں خیالی ہیں اور انکی قیمتیں ک کو اس ضابطہ سے محسوب کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ عمل حساب میں لوکارثمی جدولوں سے مدد ملیگی چنانچہ یہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$۰٫۴۸۴۵ \pm ۲٫۱۴۲۴\sqrt{-۱}$$

۲ ــــ دفعہ ۱۱۰ مثال ۲ کی مساوات

$$لا^{۴} - ۱۲لا + ۷ = ۰$$

کو پوری طرح حل کرو۔

ہم حاصل کرتے ہیں

عہ = ۰٫۵۹۳۶۸، یہ = ۲٫۰۴۷۲۷

$ف'$(عہ) = ۔ ۱۱٫۱۶۳۵، $ف'$(یہ) = ۲۲٫۳۱۸۰

اسلئے خیالی اصلوں کا زوج ہے

−۱،۳۲۰۴۸ ± ۲،۰۰۳۹ √−۱

۳ — مساوات

۲لا^۴ − ۱۳لا^۲ + ۱۰لا − ۱۹ = ۰

کو حل کرو —

اِسکی دو اصلیں حقیقی ہونی چاہئیں، ایک (عہ) مثبت، اور دوسرا (بہ) منفی ۔ ۲ سے تقسیم کرو اور مساوات کو اس شکل میں لکھو:—

ف(لا) ≡ لا^۴ − ۶،۵ لا^۲ + ۵ لا − ۹،۵ = ۰

جب ف (لا) = ۰ کی اصلوں کی علامتوں کو بدلکر، بہ محسوب کرایا جائے تو فَ (بہ) کی قیمت معلوم کرنیکے لئے ہارنر کے عمل سے حاصل شدہ آخری استحالہ میں آخر سے جو دوسرا سر ہے اسکی علامت بدلنی چاہئے ۔

عہ = ۲،۴۵۷۳۳ ، بہ = −۳،۰۳۰۵۵ ،

فَ(عہ) = ۳۲،۴۰۹ ، فَ(بہ) = −۶۶،۹۳۶

اسلئے −۴ک^۲ = ۵،۴۷۳ / ۱،۱۴۶۴

اور خیالی اصلیں ہیں

۰،۲۸۶۶ ± ۱،۰۹۲۴ √−۱

(267)

۴ — مساوات

لا^۴ − ۸۰لا^۳ + ۱۹۹۸لا^۲ − ۱۴۹۳۷لا + ۵۰۰۰ = ۰

کو حل کرو —

صریحاً ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے اور دوسری کا ۱۲ اور ۱۳ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۹۳)

عہ = ۰،۳۵۰۹۸ ، بہ = ۱۲،۷۵۶۴۴

فَ(عہ) = −۱۳۵۶۴ ، فَ(بہ) = ۵۲۸۶،۷

اسلئے ۴ک^۲ = ۴۱۳،۳ / ۵۳،۷۸۵

اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں اور آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہیں ۲۔۶۰۲،۲۱
اور ۲۲۲۳۸۳ ، ۳۴ ۔

اس مساوات کی سب اصلوں کو ینگ نے ہارنر کے طریقہ سے محسوب کیا ہے (دیکھو کعبی اور چار درجی مساواتوں کی تکمیل اور حل صفحہ ۱۶۲ تا ۲۲۱) اور ہم نے آخر میں جو دو اصلیں حاصل کی ہیں وہ ینگ کے حاصل کردہ قیمتوں کے مطابق ہیں۔

۱۲۶ ۔ چار درجی کا حل (گذشتہ سے پیوستہ)

جب چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہوں تو ظاہر ہے کہ دفعہ ما سبق کے حل کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس صورت میں اور عموماً اصلوں کی نوعیت خواہ کچھ ہی ہو طریقہ ذیل استعمال کیا جا سکتا ہے :۔

فرض کرو کہ مساوات سب سے پہلے اسکی دوسری رقم کو خارج کردینے کے بعد شکل ذیل میں لکھی گئی ہے ۔

$$ف(لا) \equiv لا^4 + ق\ لا^2 + ر\ لا + س = 0$$

اسکی اصلوں کو ھ ± ک ، ‒ ھ ± کَ ، فرض کیا جا سکتا ہے یہاں اصلوں کی نوعیت کے متعلق کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا ہے۔ انکی نوعیت $ک^2$ اور $کَ^2$ کو محسوب کرلینے کے بعد انکی علامتوں پر منحصر ہوگی۔ لا کی بجائے ھ + ک درج کرنے اور پہلے کی طرح عمل کرنے سے

$$-ک^2 = \frac{6\ فَ(ھ)}{فً(ھ)} = \frac{4ھ^3 + 2ق\ ھ + ر}{4ھ}$$

یعنے
$$-4ک^2 = 4ھ^2 + 2ق + \frac{ر}{ھ}$$

جس سے ک معلوم ہوتا ہے جبکہ 'ھ' معلوم ہو جائے۔ ک کو جب مثال ۲۶ صفحہ (۲۲۴) کی دو مساواتوں سے ساقط کیا جاتا ہے تو

ہ میں جو چہار درجی حاصل ہوتا ہے وہ کعبی

$$م^۳ + ۲ ق م^۲ + (ق^۲ - ۴ س) م - ر^۲ = ۰$$

میں تحویل ہو جاتا ہے جبکہ ایک اصل ۴ ھ^۲ ہے۔ اس کعبی کی ایک اصل مثبت ہونی چاہیئے۔ باقی دو اصلیں دونوں مثبت، دونوں منفی یا دونوں خیالی ہو سکتی ہیں بموجب اس کے کہ دیے ہوئے چار درجی کی اصلوں کی نوعیت کیا ہے۔ یہ مساوات فی الواقعی زیر بحث چار درجی کے لئے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۱۸۳) محول کعبی ہے (جسکی اصلوں کو ۴ سے ضرب دیا گیا ہے)۔ فرض کرو کہ اس کی مثبت اصل کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے (اگر تینوں اصلیں مثبت ہوں تو کسی ایک کا محسوب کرنا کافی ہے) اس طرح ۴ ھ^۲ متعین ہو جاتا ہے اور اس سے ھ۔ پھر مجوزہ چار درجی کا پورا حل ان دو ضابطوں سے ملتا ہے:—

(268)

$$ھ \pm \sqrt{-\tfrac{1}{۴}(۴ ھ^۲ + ۲ ق + \tfrac{ر}{ھ})} ، - ھ \pm \sqrt{-\tfrac{1}{۴}(۴ ھ^۲ + ۲ ق - \tfrac{ر}{ھ})}$$

مثالیں

۱— مساوات

$$لا^۴ + لا + ۱۰ = ۰$$

کا مکمل حل معلوم کرو۔

اس مساوات کو مرفی (Murphy) نے (اپنی کتاب "مساواتوں کا نظریہ" صفحہ ۱۲۵ میں) اپنے اس مجوزہ طریقہ کی توضیح میں استعمال کیا ہے جو متناہی سلسلوں کی مدد سے مساواتوں کی خیالی اصلوں کو متعین کرنیکا ہے ہمیں فوراً محول کعبی حاصل ہوتا ہے

$$م^۳ - ۴۰ م - ۱ = ۰$$

اور ہارنر کے عمل سے اسکی مثبت اصل ۶٫۳۳۷۰۱۸۴ ہے۔ پس ھ^{۲} کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور اس سے ھ = ± ۱٫۲۵۸۶۔ پھر ہم حاصل کرتے ہیں $\frac{ر}{ھ}$ = ± ۰٫۷۹۴۵ بموجب اسکے کہ ھ کی علامت مثبت یا منفی استعمال کی گئی ہو۔ ہر صورت میں جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اس لئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ ان کو آسانی کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے اور وہ یہ ہیں

۱٫۲۵۸۶ ± ۱٫۳۳۵۲ √−۱ ، −۱٫۲۵۸۶ ± ۱٫۱۱۷۷۱ √−۱

۲۔ مساوات

لا^{۴} + ۹ لا^{۲} − ۶ لا + ۵ = ۰

کو حل کرو۔

اس مساوات پر اسپٹزر (Spitzer.) نے بحث کی ہے (*Allgemeine Auflosung der Zahlen-Gleichungen.* p. 15.) اس کے لئے محول کعبی ہے

ا^{۳} + ۱۸ ا^{۲} + ۱۶۱ ا − ۳۶ = ۰

جسکی مثبت اصل ۰٫۵۱۰۹۴۲۴۹ ہے۔ پس ھ = ± ۰٫۳۵۷۴۰ اور اسلئے $\frac{ر}{ھ}$ = ± ۱۲٫۷۸۷۸ اور ہر صورت میں، خواہ ھ کو مثبت لیا جائے یا منفی، جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اسلئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ یہ چار اصلیں ہیں

۰٫۳۵۷۴ ± ۰٫۱۶۵۶۳ √−۱ ، −۰٫۳۵۷۴ ± ۲٫۱۹۷۰۶ √−۱

(269)

۳۔ مساوات

لا^{۴} − ۲ لا^{۳} − ۷ لا^{۲} + ۱۰ لا + ۱۰ = ۰

کو حل کرو۔

دوسری رقم کے اخراج کے لئے اصلوں کو ۲ سے ضرب دو اور پھر ان کو بقدر ایک کے گھٹاؤ۔ استحالہ شدہ مساوات کا محول کعبی آسانی کے ساتھ

حاصل ہوتا ہے

ما۳ − ۶۸ ما۲ + ۳۲۰ ما − ۲۵۶ = ۰

اسکی اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرو اور معلوم کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل ۶ اور ۷ کے درمیان ہے جو ہارنر کے عمل سے حاصل ہوتی ہے ۶۲۹۸۳۸ − پس ۴ ھ۲ = ۶۲۹۸۳۸ اور ھ = ± ۳۹۶۸ ۰

اب خواہ ھ کو مثبت لیا جائے یا منفی یہ معلوم ہوتا ہے کہ جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت عدد ہے اور اسلئے اس صورت میں تمام اصلیں حقیقی ہیں ۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں ۴ ک۲ = ۴۰۸۴۰ ۹ ۰ اور ۴ ک۲ = ۰۰۸۴۰ ۹ ۰ پس ک = ± ۱۵۰۴ اور ک = ± ۰۴۹۶۰

اب دوسری رقم کو خارج کرتے ہیں جو دو استحالے عمل میں لائے گئے تھے ان کو حساب میں شامل کر لینے سے مطلوبہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۲۷۳۲، ۲۲۳۶، − ۲۲۳۶، − ۲۷۳۲

اس نتیجہ کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ یہ دیا ہوا تفاعل اجزائے ضربی لا۲ − ۵ اور لا۲ − ۲ لا − ۲ کا حاصل ضرب ہے (مثال ۵ صفحہ (۳۱۴) کے ساتھ مقابلہ کرو) ۔

۴ — مساوات

لا۴ − ۷ لا۳ + ۷ لا۲ − ۷ لا + ۷ = ۰

کو حل کرو ۔

اس مثال پر جلینک (Jelinek.) نے بحث کی ہے

Die Aufrosung hoheren numerischeu Gleichungen, P. 29 دوسری رقم کو خارج کرنے کے لیے اصلوں کو ہم سے ضرب دو اور پھر بقدر ۷ کے گھٹاؤ ۔ اس طریقہ سے ہم حاصل کرتے ہیں

لا۴ − ۱۸۲ لا۲ − ۱۶۲۴ لا − ۳۰۵۹ = ۰

جسکا محول کعبی ہے

ما۳ − ۳۶۴ ما۲ + ۴۵۳۶۰ ما − ۲۶۳۷۳۷۶ = ۰

اسکی مثبت اصل کا حل کرنے کے لئے اصلوں کو ۱۰۰ سے تقسیم کرنا بہتر ہوگا

جس سے استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ ہارنر کے عمل سے یہ اصل حاصل ہوتی ہے ۲٫۰۵۹۱۔ اسلئے ۴ ھ۲ = ۲٫۰۵۹۱ اور ھ = ± ۰٫۷۱۷۔ اب اگر ھ کو مثبت لیا جائے تو جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت ہے اور اس لئے دو اصلیں حقیقی ہیں۔ اگر ھ کو منفی لیا جائے تو جذر المربع کے تحت کی مقدار منفی ہے اور اسلئے دو اصلیں خیالی ہیں۔ پس دوسری رقم کو خارج کرنیکے لئے جو دو استحالے عمل میں لانے پڑے ان کو حساب میں شامل کر لینے کے بعد مجوزہ مساوات کی چاروں اصلیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

۵٫۹۹۳، ۱۱٫۹۱، −۰٫۰۴۲ ± ۱٫۰۲۳ √−۱

۵۔ مساوات

لا۴ − ۸۰ لا۳ + ۱۹۹۸ لا۲ − ۱۴۹۳۷ لا + ۵۰۰۰۰ = ۰

کو حل کرو۔

یہ ینگ کی مساوات ہے جسکو دفعہ ماسبق میں حل کیا گیا تھا۔ ہم اسکے حل کو اس دفعہ کے طریقہ سے مکرر معلوم کرتے ہیں تا کہ طالب علم کو اس محنت کا اندازہ ہو جائے جو دونوں طریقوں میں کرنی پڑتی ہے جب دوسری رقم آسانی کے ساتھ جدا ہو جائے (جیسا کہ اس مثال میں) یا جب دوسری رقم خود مساوات میں موجود نہ ہو تو یہ معلوم ہوگا کہ دفعہ ہذا کا طریقہ دفعہ ماسبق کے طریقہ سے زیادہ آسان ہے۔ اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات ہے

لا۴ − ۴۰۲ لا۲ + ۹۸۳ لا + ۲۵۴۶۰ = ۰

جسکا محول کعبی ہے

ما۳ − ۸۰۴ ما۲ + ۵۹۷۶۴ ما − ۹۶۶۲۸۹ = ۰

ہارنر کے عمل سے ۴ ھ۲ = ۳۸٫۲۱۲۳۷ اور اس لئے ھ = ± ۱۳٫۴۴۶۲۔ ھ کی علامت کچھ ہی ہو جذر المربع کے تحت کی مقدار مثبت ہے اور اسلئے چاروں اصلیں حقیقی ہیں جنکو معلوم کرنیکے لئے

270)

یہ دو ضابطے ہیں

$-ھ \pm \sqrt{۳۸،۴۷۳۹}$ ، $ھ \pm \sqrt{۱،۱۹۲۰۹}$

پس ہر اصل میں ۲۰ جمع کرنے سے مجوزہ مساوات کی یہ چار اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۱۲،۷۵۶۵ ، ۰،۳۵۱۱- ، ۳۴،۸۳۲۱ ، ۳۲،۰۶۰۳

۶ — مثال ۴ صفحہ ۳۵۴ کی مساوات

$لا^۴ - ۳ لا^۲ + ۷۵ لا - ۱۰۰۰۰ = ۰$

کو پوری طرح حل کرو۔

اصلیں ہیں ۹،۸۸۶۰ ، -۱۰،۲۶۰۹ ، $-۰،۱۸۷۴۸ \pm ۹،۹۲۷ \sqrt{-۱}$

۷ — مثال ۲ صفحہ ۳۱۲ کی مساوات

$لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۳ لا + ۲۳ = ۰$

کو پوری طرح حل کرو۔

اصلیں ہیں ۳،۷۸۵۳ ، ۲،۰۵۲۲ ، $-۰،۹۱۸۹ \pm ۱،۴۵۴۵ \sqrt{-۱}$

۸ — مثال ۴ صفحہ ۳۲۱ کی مساوات

$لا^۴ + ۳ لا^۳ - لا^۲ - ۳ لا + ۱۱ = ۰$

کو حل کرو۔

اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور دوسری رقم کو خارج کرو۔ اسکے محول کیلئے ہارنر کا طریقہ استعمال کرو تو معلوم ہوگا کہ اسکی ایک متوافق اصل ۱۸۰ ہے، پس $ھ = ۳\sqrt{۵}$ ۔ حل کو آسانی کے ساتھ مکمل کیا جا سکتا ہے اور مجوزہ مساوات کی چار خیالی اصلوں کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

$-\frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴}\sqrt{۵} \pm \frac{۱}{۴}\sqrt{-۱۰-۲\sqrt{۵}}$ ، $-\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴}\sqrt{۵} \pm \frac{۱}{۴}\sqrt{-۱۰+۲\sqrt{۵}}$

۹ — مثال ۱۴ صفحہ ۳۷۰ کی مساوات

$لا^۴ - ۱۱۷۲۷ لا + ۴۰۳۸۵ = ۰$

کی خیالی اصلیں معلوم کرو۔

جواب:- $-۱۲،۴۴۳۳ \pm ۱۹،۷۵۹۶ \sqrt{-۱}$

71)

نوٹ (ا)

مساواتوں کا جبری حل

مساوات درجۂ دوم کا حل عربوں کو معلوم تھا چنانچہ محمد بن موسیٰ اور نویں صدی کے دیگر مصنفین کی تصنیفات میں اسکا ذکر موجود ہے عمر خیام کا ایک مقالہ، جبر و مقابلہ کے مضمون پر، اسوقت موجود ہے جو شاید گیارہویں صدی کے وسط میں تحریر کیا گیا تھا۔ اس میں کعبی مساواتوں کی جماعت بندی ہندسی عمل کے طریقوں کے ساتھ کی گئی ہے لیکن عام حل حاصل کرنے کی کوئی کوشش نہیں کی گئی۔ تیرہویں صدی کے شروع میں لیونارڈو (مقام پی سا کا باشندہ) نے عربوں سے اس مضمون کی تحصیل کی اور اس کو اٹلی میں منتقل کیا اور اسوقت سے ایک عرصہ دراز تک اٹلی والے اس علم کے سرپرست رہے۔ لوکس پیاسیولس نے (جو لوکس ڈی برگو کے نام سے مشہور ہے) ایک کتاب "L' Arte Maggiore" کے نام سے ۱۴۹۴ء میں شائع کی۔ اس نے کعبی مساواتوں میں عربوں کی جماعت بندی کا تتبع کیا اور یہ رائے ظاہر کی کہ اس علم کی موجودہ حالت کا لحاظ کرتے انکا حل حاصل کرنا اتنا ہی ناممکن ہے جتنا دائرہ کی تربیع کرنا۔ لیکن اس کے ساتھ ہی وہ اس بات کا بھی اشارہ کرتا ہے کہ اس علم کی ترقی میں سب سے پہلا مسئلہ یہی ہوگا جسکی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوگی۔ مساوات $لا^3 + م لا = ن$ کا حل سیپیو فیرو (Scipio Ferreo) نے معلوم کیا لیکن اس کے انکشاف کا حل کسی کو معلوم نہ ہو سکا سوائے اس بات کے کہ اس نے اپنے طالب علم

فلاریڈو کو سنہ ۱۵۰۵ء میں اس حل سے آگاہ کیا۔ ٹارٹاگلیا (Tartaglia) کی توجہ اس مسئلہ کی طرف سنہ ۱۵۳۰ء میں منعطف ہوئی اور وہ بھی اس اس وجہ سے کہ کولا (colla.) نے ایک ایسا مسئلہ تجویز کیا تھا جسکا حل $لا^3 + ف\ لا^2 = ق$ کی شکل کی کعبی مساوات پر منحصر تھا۔ فلاریڈو کو جب اس بات کا علم ہوا کہ ٹارٹاگلیا نے اس مساوات کا حل حاصل کرلیا ہے تو اس نے $لا^3 + م\ لا = ن$ کی شکل کی کعبی مساوات کے حل کا جو اسکو معلوم تھا اعلان کردیا۔ ٹارٹاگلیا کو اس کے بیان کی صداقت پر شبہ ہوا اور اس نے سنہ ۱۵۳۵ء میں اسکو دعوت مقابلہ دیدی اور اس اثناء میں خود بھی $لا^3 + م\ لا = ن$ کا حل دریافت کرلیا۔ یہ حل لا کی بجائے $\sqrt[3]{ت} - \sqrt[3]{ع}$ فرض کرنے پر منحصر ہے جو دو جذر الکعبوں کے فرق پر مشتمل ہے۔ کارڈن کے نام سے جو حل منسوب کیا جاتا ہے وہ دراصل اسی حل کی بنیاد پر قائم کیا گیا ہے۔ ٹارٹاگلیا نے اپنی سعی کو جاری رکھا اور مختلف شکل کی کعبی مساواتوں کو جو عرب مصنفین کی تقسیم کے تحت آتی تھیں حل کرنیکے لئے قوانین دریافت کئے۔ کارڈن نے جو ان قوانین کو حاصل کرنے کی فکر میں تھا ٹارٹاگلیا سے درخواست کی مگر ناکام رہا۔ آخر بہت کچھ منت سماجت کے بعد ٹارٹاگلیا راضی ہوا اور اس نے ان قوانین کی تفہیم کی مگر ساتھ ہی کارڈن سے وعدہ لے لیا کہ وہ اس کو اپنے سینہ میں راز کے طور پر محفوظ رکھیگا اور کسی کو اسکا علم نہ ہونے دیگا۔ اپنے وعدہ کو بالائے طاق رکھکر کارڈن نے ٹارٹاگلیا کے قوانین کو اپنی عظیم الشان تصنیف "Ars Magna" میں سنہ ۱۵۴۵ء میں شائع کردیا حالانکہ ٹارٹاگلیا کا ارادہ تھا کہ وہ ان کو اپنی تصنیف میں شائع کریگا۔ اس نے اپنی تصنیف کی ابتدا سنہ ۱۵۵۶ء میں کی لیکن سنہ ۱۵۵۹ء میں کعبی مساواتوں کی بحث پر پہنچنے سے پہلے ہی انتقال کرگیا۔ اب چونکہ اس کی تصنیف میں اس کے دریافت کردہ قوانین کا

(272

ذکر موجود نہ تھا یہ قوانین امتداد زمانہ کی باعث کارڈن سے منسوب کئے جانے لگے اور ان کے انکشاف کا سہرا اسی کے سر باندھ دیا گیا۔

ظاہر ہے کہ اسکے بعد علماء جبر و مقابلہ کی توجہ فطرتاً درجہ چہارم کی مساواتوں کے حل کی طرف منعطف ہوئی اور یہاں بھی کولاہی اسکا باعث ہوا کیونکہ اس نے مساوات

لا^۴ + ۶ لا^۲ + ۳۶ = ۶۰ لا

کو حل کرنے کی تجویز اُسوقت کے علماء کے سامنے پیش کی۔ کارڈن نے اس قسم کی مساواتوں کے لئے ایک ضابطہ حاصل کرنیکی سعی کی لیکن اسکا انکشاف اس کے طالب علم فیراری (Ferrari) کی قسمت میں تھا۔ فیراری نے جو طریقہ استعمال کیا تھا وہ ایک استحالہ پر مبنی ہے جس سے مساوات کی طرفین کامل مربع بن جاتی ہیں۔ اس میں ایک نئی مقدار داخل کیجاتی ہے جو خود ایک تیسرے درجہ کی مساوات سے متعین ہوتی ہے۔ یہ فی الحقیقت خاصیت میں دفعہ ۶۳ کا طریقہ ہے اور اس کو بعض اوقات بومبلی (Bombelli) سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اسکو اپنے مقالہ جبر و مقابلہ میں ۱۵۷۹ء میں شائع کیا۔ سمسن کے نام سے جو حل مشہور ہے وہ اگرچہ بہت بعد (تقریباً ۱۷۴۰ء میں) شائع ہوا لیکن اصولاً کسی حال میں بھی فیراری کے حل سے مختلف نہیں ہے۔ ۱۶۳۷ء میں ڈیکارٹ کا شہرۂ آفاق رسالہ شائع ہوا جس میں علم جبر و مقابلہ کی بہت سی ترمیمات و اصلاحات درج ہیں۔ ان میں سے قابل ذکر یہ ہیں مساواتوں کی تنفی اور خیالی اصلوں کی جانچ اور اس کا علامتوں کا قانون۔ چار درجی کو دو دو درجی اجزاء کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرنا اگرچہ فیراری کی شکل سے آسانی کے ساتھ اخذ ہو سکتا ہے تاہم چار درجی کے حل میں قابل قدر اضافہ ہے۔ یولر کا جبر و مقابلہ ۱۷۷۰ء میں شائع ہوا۔ اس نے چار درجی کا جو حل پیش کیا ہے (دیکھو دفعہ ۶۱) وہ اس لحاظ سے اہم ہے کہ اس کی شکل اور

کعبی کے حل کی شکل میں تطابق اور تشابہ پایا جاتا ہے کیونکہ دونوں صورتوں میں اصل کے لئے غیر منطق جملہ فرض کر کے مساواتوں کو حل کیا جاتا ہے ڈیکارٹ اور یولر کے طریقے ان کوششوں کا نتیجہ ہیں جو انھوں نے مساواتوں کا عام جبری حل دریافت کرنے میں کی تھیں۔ اٹھارویں صدی میں علماء ریاضی نے اس مسئلہ پر بہت زور لگایا اور بڑی چھان بین کی مگر چوتھے درجہ سے اعلی تر درجوں کی مساواتوں کی صورت میں انکی محنت کامیاب نہیں ہوئی۔

کعبی اور چار درجی کے جو حل علماء قدیم نے حاصل کئے انہیں دو جدا گانہ طریقے ہمارے مشاہدہ میں آتے ہیں۔ پہلا وہ ہے جو ٹارٹاگلیا اور یولر کے مفروضات پر مبنی ہے اور جس کی ابتدا اصل کیلئے ایک غیر منطق تصریحی شکل اختیار کرنے سے ہوتی ہے۔ دوسرا وہ ہے جس میں دئے ہوئے تفاعل کے ایک استحالہ کی مدد سے اس بات کا کھوج لگایا جاتا ہے کہ آیا اس کے اجزائے ضربی کی نوعیت بدلی جا سکتی ہے تاکہ وہ ایسی شکل میں تحویل ہو جائے جو آسانی سے تحلیل ہو سکے۔ دفعہ ۵۵ میں یہ دونوں طریقے بیان کر دیے گئے ہیں اور ان کے ساتھ ایک تیسرے کا بھی ذکر کیا گیا ہے جسکو وانڈرمنڈ اور لگرانج نے دریافت کیا تھا۔ انہوں نے اپنی تحقیقاتوں کو اسی زمانہ میں شائع کیا تھا یعنی ۱۷۷۰ء اور ۱۷۷۱ء میں۔ ان میں سے وانڈرمنڈ ہی پہلا شخص تھا جس نے کسی مساوات کے جبری حل کی ضروری خاصیت کو صاف طور پر واضح کیا جو یہ ہے کہ کسی مساوات کا جبری حل، جذری علامات (جو اس میں شامل ہوتی ہیں) کے اجتماع کی وجہ سے تمام اصلوں کو بلا امتیاز تعبیر کرنا چاہئے جبکہ اس میں شامل ہونیوالے ہمسروں کے تفاعلوں کی بجائے اصلوں کے متشاکل تفاعل درج کئے جائیں (دیکھو دفعہ ۱۰۱)۔ کعبی اور چار درجی کی صورتوں میں اس نوعیت کے ضابطے حاصل کرنے میں اس کی کوششیں بارآور ہوئیں لیکن

پانچ درجی کی صورت میں ناکام رہیں۔ لگرانج نے اپنے پیش روؤں کی محنتوں کو جو مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں صرف ہوئی تھیں اکٹھا کرنے اور ان پر نظر ثانی کرنے کا بیڑا اٹھایا اور ان سب کے نتیجوں کو ایک یکساں اصول میں منسلک کیا۔ یہ اصول اس بات پر مشتمل ہے کہ دی ہوئی مساوات کے حل کو ایک ایسی مساوات کے حل میں تحویل کیا جائے جسکا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ سے کم ہو اور جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں اور اکائی کے جذروں کے خطی تفاعل ہوں۔ وہ یہ بھی ثابت کرتا ہے کہ پانچ درجی کو اس طرح تحویل نہیں کیا جا سکتا کیونکہ وہ مساوات جس پر اس کا حل منحصر ہوتا ہے چھٹے درجہ کی مساوات ہے۔

اب چونکہ پانچویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے کی تمام کوششیں رایگاں گئیں اسلئے علماء ریاضی کے دلوں میں فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسکا حل ممکن بھی ہے۔ چنانچہ ایبل اور وانٹزل نے ثابت کر دیا (دیکھو سیرٹ کی تصنیف (Cours L'Algebre Superieure) کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کو جس کی شکل پر کوئی قید نہ ہو حل کر لینا ناممکن ہے۔ تاہم ایم۔ ہرمائٹ نے پانچ درجی کا ایک ماورائی حل دیا ہے جسکی شکل میں ناقصی تکملے شامل ہوتے ہیں۔ لگرانج کی تحقیقاتوں کے بعد سے پانچ درجی کی بحث میں جو دوسرے اضافے ہوئے ہیں ان میں سے اہم ایک یہ ہے کہ اسکو سہ رقمی شکل میں (شرن ہاسن کی) استحالہ کی مدد سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ شرن ہاسن خود بھی ۱۶۸۳ء میں (274)

ما = ف + ق لا + لا^2 کے مفروضہ کی مدد سے کعبی اور چار درجی کو تحویل کرنے میں کامیاب ہوا تھا اور قیاس لگایا تھا کہ اسی قسم کا عمل عام مساوات پر بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ پانچ درجی کی متذکرہ بالا سہ رقمی تحویل کو مسٹر جیرارڈ نے میتھیمائیکل ریسرچ ۱۸۳۲ء ۲۵ میں شائع کیا اور ایم ہرمائٹ کا بیان ہے کہ پانچ درجی کی بحث میں یہ تحویل اہم ترین اضافہ ہے

خصوصاً ایسی صورت میں جبکہ ایبل نے یہ ثابت کر دیا تھا کہ اسکا حل ناممکن ہے۔ ایک مقالہ میں جس کو رابرٹ ہارلی نے کوارٹرلی جرنل آف میتھامیٹکس حصہ ششم صفحہ ۳۸ میں شایع کیا تھا اس بات کو ثابت کیا ہے کہ یہ تحویل پہلے ہی عمل میں آچکی تھی کیونکہ اسکو سویڈن کے ریاضی داں برنگ نے ۱۷۸۶ء میں حاصل کیا تھا۔ ڈاکٹر سلوسٹر کا استحال بھی بہت اہم ہے جس کے ذریعہ سے پانچ درجی کو تین پانچویں درجہ والی رقموں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ یہ ایسی شکل ہے جو پانچ درجی کو استعمال کرنے میں بڑی سہولت پیدا کرتی ہے۔ پانچ یا اس سے زیادہ درجہ والی مساواتوں کی بحث میں جو اور اضافے زمانہ حال میں ہوئے ہیں وہ زیادہ تر ان اشکال کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں سے متعلق ہیں۔ ان تحقیقاتوں کا کچھ ذکر اس تصنیف کی دوسری جلد میں ہے لیکن اور زیادہ تحقیق سے کام لینا ہے تو طالب علم کو Clebsch کی "Theorie der binaren algebraischen" اور سامن کی "Lessour Introductory to the Modern Higher Algebra" کا مطالعہ کرنا چاہیئے۔

(75)

نوٹ (ب)

عددی مساواتوں کا حل

عددی مساواتوں کی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنیکی
پہلی سعی جو کی گئی اسکو ویٹا نے ۱۶۰۰ء میں شایع کیا۔ اس سے پہلے
کارڈان نے ... پر "غلط باطل" (جسکو وہ regula aurea کہتا ہے)
کا قانون جاری کیا تھا مگر اس طریقہ سے جو نتیجے حاصل ہوے انکی کوئی
قدر و قیمت نہیں۔ ویٹا کو خیال ہوا کہ دی ہوئی مساوات کی کسی
خاص عددی اصل کو ایسے طریقہ سے حاصل کرنا ممکن ہے جو جذر المربع
اور جذر المکعب نکالنے کے معمولی اعمال سے مشابہ ہے۔ پھر اسکے
دل میں یہ سوال پیدا ہوا کہ اعداد کے جذر معلوم کرنے میں کس قسم کی ترمیم ہونی
چاہیے کہ ان کی مدد سے مساوات کی اصل حاصل ہو سکے جبکہ مساوات
کے سر دیئے ہوئے اعداد ہوں۔ مساوات ف(لا) = ق لیکر
جہاں ق دیا ہوا عدد ہے اور ف(لا) ایک کثیر الارقام ہے
جس میں لا کی مختلف قوتیں شامل ہیں ویٹا نے یہ ثابت کیا کہ
ف(لا) میں اصل کی پہلی تقریبی قیمت درج کرنے سے اصل کا
دوسرا ہندسہ (جو کسر اعشاریہ میں بیان کیا گیا ہو) عمل تقسیم سے حاصل
ہو سکتا ہے۔ جب یہ قیمت حاصل ہو جائے تو اس عمل کو دہرانے
سے اصل کا ایک اور ہندسہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ وقس علیٰ ہذا۔ یہ
یہ امر غور طلب ہے کہ اس طریقہ کا اصول اس خاص اصول کے مماثل
ہے جو نیوٹن اور ہارنر کے تقریب کے طریقوں میں مضمر ہے۔ (دیکھو دفعات

۱۰۷، ۱۰۸)۔ وئیٹا کے بعد سے جو کچھ اس طریقہ میں اضافہ ہوا ہے وہ صرف عمل حساب کو اس طور پر ترتیب دینا ہے کہ اصل کے معلوم کرنے میں صحت اور آسانی پیدا ہو جائے ورنہ اصولاً کوئی اختلاف نہیں ہے۔ اِس باب میں کسقدر بڑی ترقی ہوئی ہے اسکا اندازہ مانٹوکلا (Montucla.) کے بیان سے بخوبی ہو سکتا ہے جو اس کی تصنیف تاریخ ریاضیات (Histoire des Math.) جلد اول صفحہ ۶۰۳ میں درج ہے۔ وئیٹا کے طریقہ تقرب پر بحث کرتے ہوے وہ کہتا ہے کہ چار درجی کی اصل کو اعشاریہ کے گیارہ مقامات تک معلوم کرنیکا عمل حساب (جسکو والس (Wallis) نے پورا کیا) از حد صبر آزما کام ہے۔ لیکن اب وہی عمل حساب بہت آسانی کے ساتھ ہر وہ شخص کر سکتا ہے جس نے ہارنر کے طریقہ میں مہارت حاصل کی ہو۔

نیوٹن کا تقرب کا طریقہ ۱۶۶۹ء میں شائع ہوا لیکن اس کے قبل وئیٹا کا طریقہ استعمال کیا جاتا تھا جسکو ہیاریو، آٹریڈ، پیل اور دوسروں نے کچھ آسان بنا دیا تھا۔ نیوٹن کے بعد سمپسن اور برنولی نے خود کو اس مسئلہ کی طرف متوجہ کیا۔ چنانچہ اسکا نتیجہ یہ ہوا کہ ڈینیل برنولی مساوات کی اصل کو متوالی سلسلہ کی شکل میں بیان کرنے میں کامیاب ہوا اور یولر نے بھی اصل کے لئے اسی قسم کا جملہ حاصل کیا۔ لیکن یہ دونوں طریقے لگرانج کے بیان کی بموجب کسی طرح بھی نیوٹن کے حل سے اصولاً مختلف نہیں ہیں۔

پس لگرانج کے زمانہ تک عددی مساوات کی اصل کو تقریبی طور پر حاصل کرنے کا صرف ایک طریقہ تھا اور یہ طریقہ جسکو بالآخر ہارنر نے مکمل کیا اب تک بہترین طریقہ چلا آتا ہے۔

لگرانج نے کتاب محولہ بالا میں نیوٹن اور وئیٹا کے طریقوں کے نقائص کو واضح کیا ہے۔ وئیٹا کے طریقہ کا حوالہ دیتے ہوے وہ کہتا ہے کہ اس میں بہت سی آزمایشوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے اور

اس پر اعتماد نہیں کیا جا سکتا جب تک کہ مساوات ف(لا) = ق کی دائیں جانب کی تمام رقمیں مثبت نہ ہوں۔ نیوٹن کے طریقہ میں وہ یہ نقائص بتاتا ہے:۔ اول' اس سے متوافق اصل محدود رقموں میں حاصل ہو نہیں سکتی۔ دوم' عمل میں یہ خوف کہ کہیں ہر نئی تصحیح درست ہے یا نہیں۔ بالآخر' اس مساوات کی صورت میں اس طریقہ کی ناکامی جسکی اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔

لگرانج نے جس مسئلہ کو اپنے لئے پیش کیا وہ یہ تھا:۔

"اگر ایک عددی مساوات دی گئی ہو جس کی اصلوں کی نوعیت اور قیمتوں کے متعلق پہلے سے کچھ بھی معلوم نہیں ہے تو ان اصلوں کی ممکن ہو تو ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کرنا یا ہر اصل کی تقریبی قیمت تقرب کے مطلوبہ درجہ تک معلوم کرنا"

اس مسئلہ کو اس نے حل کرنے کی جو کوشش کی ہے اسکا ذکر کرنے سے پیشتر یہ دیکھنا ضروری ہے کہ متذکرہ بالا تقرب کے طریقوں کے علاوہ اس سمت میں کونسی باتیں معلوم ہو چکی تھیں۔ ہیریٹ نے ۱۶۳۱ء میں مساوات کی ترکیب کو اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں معلوم کیا تھا اور وہ روابط دریافت کر لئے تھے جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں۔ وئیٹا نے بھی لی صورت میں ان روابط کو اس سے پہلے معلوم کیا تھا لیکن وہ عام صورت میں کوئی ایسا نتیجہ اخذ نہ کر سکا جیسا کہ ہیریٹ نے حاصل کیا۔ یہ انکشاف اہم تھا کیونکہ اس سے اس بات کا پتہ چلا کہ صحیح اصل کو مساوات کی مطلق رقم کا جزو ضربی ہونا چاہئے اور ایسی اصلوں کا تعین کرنیکے لئے نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ اسکا لازمی نتیجہ صریح تھا۔ پس اصلوں کے حدود معلوم کرنیکی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوئی تاکہ مقسوم علیہم کے طریقہ اور تقرب کے دوسرے موجودہ طریقوں میں جو محنت کرنی پڑتی تھی وہ کم ہو جائے جیسا کہ پہلے بیان کر دیا گیا ہے ڈیکارٹ پہلا

شخص تھا جس نے مساواتوں کی نفی اور خیالی اصلوں کو پہچاننے کے لئے
ایک معیار دریافت کیا۔ نیز کسی دی ہوئی مساوات کی حقیقی اور خیالی اصلونکی
تعداد متعین کرنے کے متعلق جس تحقیق کی اس نے ابتدا کی اسکو اسٹرلنگ،
ڈی گوا، اور دوسرے علماء نے جاری رکھا۔

لگرانج نے غور کیا کہ تذکرۂ صدر مسئلہ کو حل کرنے میں سب سے
پہلے دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد متعین کرنا اور انکو
ایک دوسرے سے جدا کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے اسنے
اس مساوات کا استعمال کرنا تجویز کیا جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات
کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔ ویرنگ نے اس سے پہلے
ہی اصلوں کو جدا کرنیکا یہ طریقہ ظاہر کیا تھا لیکن لگرانج کا بیان ہے
[عددی مساواتیں نوٹ سوم] کہ جسوقت وہ اس مضمون پر
اپنی یادداشت لکھ رہا تھا وہ ویرنگ کی تحقیقاتوں سے ناواقف تھا
اب یہ ظاہر ہے کہ جب فرقوں کی مساوات نجاتی ہے تو اسکی مثبت
اصلوں کی سفلی حد معلوم کرکے وہ عدد معلوم کرنا ممکن ہے جو دی ہوئی
مساوات کی اصلوں کے فرقوں میں سے سب سے چھوٹے فرق سے
کم ہو۔ پھر علی التواتر ان عددوں کو درج کرنے سے جو اس مقدار سے
تھوڑا فرق رکھیں دی ہوئی مساوات کی اصلیوں کو جدا کیا جا سکتا ہے۔
جب اس طور پر اصلیں جدا ہو جائیں تو لگرانج کی تجویز ہے کہ انھیں سے
ہر ایک کو مسلسل کسور کے طریقہ سے جس کی تشریح اس کتاب میں
(دفعہ ۱۱۲) کر دی گئی ہے معلوم کیا جائے۔ اصلوں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ
اس اعتراض سے بچ جاتا ہے جو نیوٹن کے تذکرۂ بالا طریقہ پر وارد ہوتا
تھا چنانچہ اس طریقہ سے ہر تقریب میں خطا کی مقدار معلوم ہوتی ہے
اور جب اصل متوافق ہو تو عمل خود بخود رک جاتا ہے اور اصل محدود
شکل میں معلوم ہوتی ہے۔ لگرانج نے مساواتوں کی خیالی اصلوں کو
حاصل کرنے کے طریقے بھی دئے ہیں اور یہ بھی بتایا ہے کہ اگر مساوات میں

مساوی اصلیں ہوں تو انکو سب سے پہلے موجودہ طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

نظری طور پر لگرانج نے اپنے لئے جو مسئلہ تجویز کیا تھا اس کا حل متذکرۂ بالا تحریر کی رو سے مکمل ہے۔ لیکن عملی طور پر جہاں تک اسکا تعلق ہے وہ محض بیکار ہے۔ کیونکہ چوتھے درجہ کی مساوات کے لئے ہی فرقوں کی مساوات بنانا بہت محنت طلب ہے اور اعلیٰ تر درجہ کی مساواتوں کے لئے قریب قریب ناممکن العمل۔ اگر ہم اصلوں کو جدا کرنیکے وہ آسان ترین طریقے بھی لگرانج کے بقیہ عمل کے ساتھ کام میں لائیں جو لگرانج کے بعد معلوم کئے گئے ہیں تو بھی اس عمل پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ اس سے اصل مسلسل کسر کی شکل میں حاصل ہوتی ہے اور اسکو اس شکل میں حاصل کرنے کے لئے جو محنت درکار ہے وہ اس محنت سے کہیں زیادہ ہے جو اصل کو اعشاری شکل میں حاصل کرنیکے لئے ہارنر کے عمل میں کرنی پڑتی ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ یہ آخر الذکر عمل اُس مکمل شکل میں جسکو ہارنر نے پیش کیا ہے اُن تمام اعتراضات سے بری ہے جو نیوٹن کے طریقہ پر وارد ہوتے ہیں۔

لگرانج کے بعد وقتاً فوقتاً اور نیوٹن کے تقرب کے طریقوں میں ہارنر کی ترمیم کے علاوہ عددی مساواتوں کی تحلیل میں فوریر، بوڈان اور اسٹرم نے نہایت اہم اضافے کئے ہیں۔ بوڈان کی تحقیقات ۱۸۰۷ء میں شائع ہوئی اور فوریر کی اسکے انتقال کے بعد ۱۸۳۱ء میں اس میں شک نہیں کہ بوڈان کی تصنیف سے پہلے ہی فوریر نے وہ مسئلہ معلوم کر لیا تھا جو اس کتاب میں ایک ساتھ دونوں کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔ اسٹرم کی تحقیقات ۱۸۳۵ء میں شائع ہوئی۔ ان مصنفین نے اصلوں کو جدا کرنیکے جو طریقے بیان کئے ہیں اُنکو پوری طرح اس کتاب میں واضح کیا گیا ہے (دسواں باب)۔ ان طریقوں کو ہارنر کے طریقہ کے ساتھ شامل کرنے سے ہمیں لگرانج کے مسئلہ کا وہ حل ملجاتا ہے جو خود لگرانج کے

مجوزہ حل سے ہیں زیادہ آسان ہے۔ نیز اس سمت میں اس سے زیادہ سہولت پیدا کرنا ناممکن نظر آتا ہے۔ مساوات کی اصل دریافت کرنیمیں محنت سے بچنا اسی طرح محال ہے جس طرح جذر المربع یا جذر المکعب نکالنے کے عمل میں۔ یہ اور بات ہے کہ ہارنر کا عمل اس محنت کو حتی الامکان گھٹا دیتا ہے۔ اصلوں کو جدا کرنے میں بھی خصوصاً اسوقت جبکہ دو یا زیادہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں کم یا زیادہ محنت کرنا پڑے گی۔ اس محنت میں کچھ تخفیف ہوسکتی ہے اگر سِروں کے تفاعلوں پر جو مساواتوں کے نظریہ میں اسقدر اہم حصہ لیتے ہیں کافی غور کرلیا جائے۔ مثلاً اگر تفاعلوں ھ، ع اور حٓ کو دئے ہوئے چار درجی کیلئے محسوب کرلیا جائے تو اصلوں کی نوعیت کا فوراً معلوم کرلینا ممکن ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ ممکن ہے کہ آئندہ کسی زمانہ میں علماء ریاضی اصلوں کو جدا کرنیکا کوئی آسان طریقہ ایجاد کرسکیں جس طرح فی زمانہ سادہ اصلوں کو لوگارتم کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے لیکن فی الحال لگرانج کے مسئلہ کا مکمل ترین حل وہی ہے جو اسٹرم اور ہارنر کے طریقوں کو ملانے سے پیدا ہوتا ہے۔

اوپر جو کچھ بیان کیا گیا وہ صرف عددی مساواتوں کی حقیقی اصلوں پر صادق آتا ہے۔ ہم نے صفحہ ۳۹۵ کے حاشیہ میں اُن کتابوں کا حوالہ دیدیا ہے جنمیں خیالی اور مختلف اصلوں کو محسوب کرنیکے عام طریقے دریافت کرنے کی کوششیں کیگئی ہیں اور دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۵ میں یہ بتادیا ہے کہ تیسرے اور چوتھے درجہ کی عددی مساواتوں کی صورت میں ان اصلوں کو آسان ترین طریقہ سے کس طرح محسوب کیا جاسکتا ہے۔

(279)

نوٹ (ج)

اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ میں جو مسئلہ زیر بحث رہا ہے اُس کے سلسلہ میں یہ ضروری ہے کہ جو کچھ ثابت ہوا وہ واضح طور پر ذہن میں رہے اور جو ثابت ہونا ممکن ہے اسکو اچھی طرح ذہن نشین کیا جائے۔ اگر مساوات

$$\text{ا}_۰\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_۱\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}} = ۰$$

میں سروں $\text{ا}_۰$، $\text{ا}_۱$، ....، $\text{ا}_{\text{ن}}$ کو صرف جبری علامات کی طرح بغیر کسی قید کے استعمال کیا جائے یعنی اگر یہ سر کسی قسم کی قید کی پابندی نہ کریں جو حقیقی اعداد یا بارہویں باب میں بحث کردہ ملتف اعداد ہونے سے متعلق ہو تو ایسی مساوات کی صورت میں یہ ثابت نہیں ہوا ہے اور نہ اسکا ثبوت موجود ہے کہ ہر مساوات میں ایک اصل ہوتی ہے۔ وہ مسئلہ جو ثبوت پذیر ہے یہ ہے کہ ن ویں درجہ کی کسی منطق صحیح مساوات کی صورت میں جس کے سر سب کے سب ملتف (بشمول حقیقی) اعداد ہیں ن ملتف اعداد موجود ہوتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ چنانچہ اصطلاحات عدد اور عددی کو بارہویں باب کے وسیع معنوں میں استعمال کرنے سے زیر بحث مسئلہ کو زیادہ صحت کے ساتھ اس شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:-

ن ویں درجہ کی ہر عددی مساوات میں ن عددی اصلیں ہوتی ہیں
جہاں تک اس مسئلہ کا تعلق ہے اس میں کوئی شبہ نظر نہیں آتا کہ بالکل
سیدھا اور باقاعدہ ثبوت وہ ہے جو خیالی جملوں یا بارہویں باب میں بحث
میں آئے ہوئے ملتف عددوں کو استعمال کرنے پر منحصر ہے۔ ملتف
عددوں کو مستوی کے نقطوں کے ذریعہ تعبیر کرنیکا خیال سب سے پہلے
آرگنڈ کے ذہن میں آیا تھا جس نے ۱۸۰۶ء میں بغیر اپنا نام ظاہر کئے ایک
تصنیف شائع کی جو *Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques.*
کے نام سے موسوم ہے اس مصنف نے چند سال بعد جرجان کی
"Annales" میں اپنی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ اسمیں شک نہیں کہ آرگنڈ
نے اپنے نئے طریقوں کی تشہیر میں بہت کچھ کوشش کی لیکن ان پر بہت کم
توجہ کیگئی اور ایک مدت کے بعد انہی طریقوں کو انگلستان میں وارن
نے اور فرانس میں مورے نے بلاواسطہ دریافت کیا۔ ان معلومات کا
گاؤس نے اپنی کتابوں میں جو ۱۸۳۱ء میں شائع ہوئیں اضافہ کیا اور کوشی
نے ان طریقوں کو دفعہ ۱۲۱ کے اہم مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کیا۔ اس
مسئلہ کے سلسلہ میں جواب زیر بحث ہے اسکا وہ ثبوت جو ہم نے دفعہ ۱۲۳
میں دیا ہے فی الحقیقت اس ثبوت کی ترمیم ہے جو آرگنڈ کے اصلی مقالہ
میں پایا جاتا ہے اور جس کو کوشی نے اپنی کتاب Exercices d'Analyse
میں دہرایا ہے۔ ایک ثبوت جو بہت سی باتوں کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا
ثبوت کے مشابہ ہے مرّے نے بھی دیا ہے۔

ملتف عددوں کی ہندسی تعبیر دریافت ہونے سے پیشتر مختلف
علماء ریاضی مساواتوں کی اصلوں کی نوعیت کا مسئلہ حل کرنے میں مصروف
رہے۔ لگرانج نے اپنی کتاب "عددی مساواتوں" نوٹ نہم میں ان کی
تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ ان محققین کی فہرست میں ڈالمبرٹ ڈیکارٹ
یولر فونسنیکس اور لاپلاس شامل ہیں جنکی توجہ صرف ایسی مساواتوں پر

مرکوز رہی ہے جن کے سر منطق تھے اور انکے پیش نظر یہ مقصد تھا کہ
اجزائے ضربی لا-ع، لا-ب، وغیرہ کے وجود کو تسلیم کرکے یہ بتایا جائے
کہ اصلیں سب کی سب یا تو حقیقی ہیں یا ا + ب √-۱ کے نمونہ کی خیالی
مقداریں۔ بہ الفاظ دیگر حقیقی عددی سروں والی مساوات میں خیالی اصل
کی کوئی اور شکل سوائے ا + ب √-۱ کے نہیں ہو سکتی جس میں ا اور
ب حقیقی مقداریں ہیں۔ اس مسئلے کے ثبوت کے لئے عام طور پر جو طریقہ
رائج تھا وہ یہ ثابت کرنیکے لئے تھا کہ اس مساوات کی صورت میں جسکے
درجہ میں ۲ کسی قوت ک میں شامل ہوتا ہے اس کے دو درجی جزو ضربی
کے وجود کا امکان ایسی مساوات کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے جس کے
درجہ میں ۲ صرف قوت ک-۱ میں شامل ہو اور اس عمل سے مسئلہ کو تحویل
کرکے اسکو اس معلومہ اصول پر منحصر کردیا جائے جو یہ ہے کہ طاق درجہ کی
ہر مساوات جس کے سر حقیقی ہیں ایک اصل رکھتی ہے۔ اس مضمون
پر لگرانج نے جو تحقیقاتیں کی ہیں متذکرہ بالا کتاب میں درج ہیں۔ انکا تعلق
صرف ایسی مساواتوں سے ہے جنکے سر حقیقی ہوں۔ اور یہ بالآخر اسی
اصول پر آکر ختم ہوتی ہیں جو اوپر مذکور ہوا یعنی حقیقی سروں کے ساتھ طاق
درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل موجود ہوتی ہے۔

اسی اصول (یعنی طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل کا
وجود) پر منحصر کرکے اس مسئلہ کو حل کرنیکے دو طریقے حال ہی میں شائع
ہوئے ہیں۔ ایک وہ ہے جو پروفیسر کلفرڈ کا ہے (دیکھو اسکے میتھمائیکل
پیپرز صفحہ ۲۰ اور کیمبرج کی فلاسفیکل سوسائٹی کی روداد جلد دوم ۱۸۷۶ء) اور دوسرا طریقہ
میالنا کا ہے (دیکھو "Translatioı s of the Royal Irish Academy" ۲۶ ویں جلد
صفحہ ۴۵۲ ۱۸۷۸ء)۔ ۲م ویں درجہ کی مساوات سے ابتدا کرکے دونوں مصنف سلوسٹر کا اسقاط کا طریقہ استعمال
کرتے ہیں تاکہ م(۲م-۱) ویں درجہ کی مساوات حاصل ہو جائے جس کے
حل پر مجوزہ مساوات کی ایک اصل کے وجود کا منحصر ہونا ثابت کیا جاتا ہے
اور چونکہ عدد م(۲م-۱) میں جزو ضربی ۲، عدد ۲م کی بہ نسبت ایک

مرتبہ کم شامل ہوتا ہے یہ مسئلہ بالآخر متذکرۂ بالا طریقوں کی طرح طاق درجہ کی مساوات میں ایک اصل کے وجود کے اصول پر منحصر ہوجاتا ہے ۔ وہ دو مساواتیں جن کے درمیان عمل اسقاط جاری ہوتا ہے م ویں اور (م - ۱) ویں درجہ کی ہیں اور ان طریقوں کے طرز ثبوت کے درمیان جو فرق ہے وہ صرف ان مساواتوں کو حاصل کرنیکے طرز کے لحاظ سے ہے ۔ میالٹ کے طریقہ میں ان مساواتوں کو مجوزہ مساوات کے سادہ استحالہ کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے اور پروفیسر کلفرڈ ایک حقیقی دو درجی جزو ضربی سے دئے ہوئے کثیر الارقام کو تقسیم کرکے جو باقی رہتا ہے اسکے سِروں کو صفر کے مساوی رکھکر ان کو حاصل کرتا ہے ۔ ان سِروں کی عام شکلیں اس کتاب کی دوسری جلد میں منقطعات کے باب کے آخر کی متفرق مثالوں میں ملینگی اور وہاں یہ بات آسانی سے معلوم ہوگی کہ اس طور پہ حاصل کردہ مساواتوں سے ب کو ساقط کرنے سے ء میں ایک مساوات ملتی ہے جسکا درجہ م (۲ م - ۱) ہے ۔ (دیکھو مثال ۳۸ صفحہ ۱۰۱ جلد دوم) ۔

تمت

۴۸۶

اشاریہ

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

نوٹ :۔ اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے ۔

اصطلاحات

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

Absolute term	رقم مطلق
Ambiguous sign	مبہم علامت
Amplitude	سعت
Binomial	ثنائی، دو رقمی
Biquadratic	چار درجی
Circular functions	دائری تفاعل
Commensurable roots	متوافق اصلیں
Complex number	ملتف عدد
Complex variable	ملتف متغیر
Covariant	ہم متغیر
Derived function	مشتق تفاعل
Dialytic	بین تحلیلی
Equation of squared differences	مربع دار فرقوں کی مساوات
False position	باطل محل، کاذب محل
Fundamental Equation	بنیادی مساوات

Homogeneous products	متجانس حاصل ضرب
Homographic transformation	ہم رسم استحالہ
Incommensurable roots	متباین اصلیں
Inferior limit	سفلی انتہا
Integral values	صحیح عددی قیمتیں
Invariants	غیر متغیر
Leading cœfficients	صدر سر، فائق سر
Limiting equations	انتہائی مساواتیں
Method of divisors	مقسوم علیہم کا طریقہ، مقسوموں کا طریقہ
Modulus	مقیاس
Multiple roots	ضعفی اصلیں
Numerical equations	عددی مساواتیں
Order and weight of symmetric functions	متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن
Polynomial	کثیر الارقام، کثیر رقمی
Precession	استقبال
Quadrature	تربیع
Quantic	کثیر درجی
Quintic	پنج درجی
Rational & Integral function	منطق صحیح تفاعل، منطق اور مکملہ تفاعل
Reciprocal	متکافی
Reducing cubic	محول کعبی
Sextic	چھہ درجی، شش درجی
Special roots	خاص اصلیں

Superior limit	علوی انتہا
Symmetric function	متشاکل تفاعل
Transform	مستحیل کرنا
Transformation	استحالہ
Transformed	استحالہ شدہ، مستحیل
Trial divisor	آزمائشی مقسوم علیہ یا مقسم
Trinomial	سہ رقمی